※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x + iy)$ とする．

(1) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$（定数）のとき，f は D で定数であることを示せ．

(2) $f(z) = \dfrac{e^{iz^2} + e^{-iz^2}}{2}$ のとき，u を求めよ．

(3) $u(x,y) = e^{2x+y}\cos(2y - x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

$\boxed{2}$ 次の関数 f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．ただし，$z = x + iy$ とする．**答のみでよい．**

(1) $f(z) = \dfrac{x^2 + y^2 - 1 - 2ix}{x^2 + (y+1)^2}$　　(2) $f(z) = x^3 + i(12y - 4y^3)$

$\boxed{3}$ 次の方程式をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ．**答のみでよい．**

(1) $z^4 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$　　(2) $e^z = 1 - i$

$\boxed{4}$ $f(z) = \dfrac{1}{z} + \dfrac{z^2}{2}$ による $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の像 $f(D)$ を複素平面に図示せよ．

平成 21 年度前期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 以下において $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする．ただし，$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ で u,v は実数値とする．

(1) $u(x,y)=x^3+xy^2,\ v(x,y)=4y-y^3-x^2y$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．**答のみでよい．**

(2) $u(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．**答のみでよい．**

(3) f が領域 D で正則で $|f|=1$ のとき，f は D で定数であることを示せ．

$\boxed{2}$ (1) 〜 (2) は方程式をみたす $z\in\mathbb{C}$ を求め，(3) 〜 (6) は値を求めよ．**答のみでよい．**

(1) $\cos z=3i$　　(2) $\log(z+1)=3-\dfrac{\pi}{6}i$

(3) $e^{\tan i}$　　(4) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+i\right)$

(5) $\log(3+4i)$　　(6) $(1+\sqrt{3}\,i)^{2-i}$

$\boxed{3}$ 次の複素積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \overline{z}dz$　　$C: z=t+it^2\quad(0\leqq t\leqq 1)$

(2) $\displaystyle\int_{C_1+C_2} \mathrm{Re}z dz$　　$C_1: z=t\quad(0\leqq t\leqq 1),\quad C_2: z=\dfrac{1}{t}+it\quad(1\leqq t\leqq 2)$

(3) $\displaystyle\int_C |z|^2dz$　　$C: z=t+i\sin t\quad\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

平成 21 年度後期中間試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次の複素積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C \overline{z}dz \qquad C : z = t^2 + it \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

(2) $\displaystyle\int_C \mathrm{Im}z dz \qquad C : z = \frac{1}{t} + it \quad (3 \leqq t \leqq 5)$

(3) $\displaystyle\int_C |z|^2 dz \qquad C : z = t + i\sin t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする．

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z+2}{(z-1)(z+3)^2}dz$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2}{(z+2)(z-1)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{z+1}{(2z+1)(z-3i)}dz$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^2+1}{4z^3-17z^2+4z}dz$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z-1}{z^2(z+2)}dz$

(6) $\displaystyle\int_{|z+i|=1} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}dz$

(7) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2-z+4}{(z+2)(z^2-1)^2}dz$

(8) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin \pi z}{(2z-i)^2(4z-3)}dz$

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次の関数の $z=0$ を中心とする Laurent（ローラン）展開を $0<|z|<2$ の範囲で求めよ．
答のみでよい．

(1) $\dfrac{1}{z(z-2)^2}$　　(2) $\dfrac{1}{z^3(z^2-4)}$

$\boxed{2}$ 次の場合に，留数 $\mathrm{Res}[f,a]$ を求めよ．**答のみでよい．**

(1) $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)^2},\ a=1$　　(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+4)(z+1)^2},\ a=-1$

(3) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z(z-1)^3},\ a=1$　　(4) $f(z)=z^3e^{-\frac{2}{z}},\ a=0$

$\boxed{3}$ 次の積分を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする．**答のみでよい．**

(1) $\displaystyle\int_{|z|=\sqrt{2}}\frac{z^2}{(z+2)(z-1)}dz$　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z+1}{z(2z+1)(z-3)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z}{z^2+1}dz$　　(4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\sin\pi z}{z(4z-3)}dz$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{1}{z^2(z-3)}dz$　　(6) $\displaystyle\int_{|z|=\sqrt{7}}\frac{1}{(z-1)(z-2)^2(z-3)^3}dz$

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos\theta}d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+10x^2+9}dx$