

解答用紙の裏面使用可

- 1 以下において $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) とする .
- (1) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$ (定数) のとき, f は D で定数であることを示せ .
- (2) $f(z) = \frac{e^{iz^2} - e^{-iz^2}}{2i}$ のとき, u を求めよ . 答のみでよい .
- (3) $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ のとき, f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ . またそのときの f と f' を z で表せ .
- 2 次の関数 f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ . ただし, $z = x + iy$ とする . 答のみでよい .
- (1) $f(z) = \frac{x + y + i(x - y)}{x^2 + y^2}$ (2) $f(z) = 3x^4 + 3y^4 - 2x^2y^2 + i(-4x^3y + 4xy^3 + 16xy)$
- 3 次の方程式をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ . 答のみでよい .
- (1) $z^3 = i$ (2) $e^z = \sqrt{3} - i$
- 4 $f(z) = z - \frac{z^3}{3}$ による $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ の像 $f(D)$ を複素平面に図示せよ .

解答用紙の裏面使用可

- 1 以下において $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする．ただし, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) で u, v は実数値とする．

(1) $u(x, y) = 5x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 9x^2 - 3y^2$, $v(x, y) = -4x^3y - 4xy^3 + 6xy$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．答のみでよい．

(2) $u(x, y) = e^y(x \cos x + y \sin x + \sin x)$ のとき, f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．答のみでよい．

(3) f が領域 D で正則で $|f|^2$ が調和のとき, f は D で定数であることを示せ．

- 2 (1) は方程式をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求め, (2) と (3) は値を求めよ．答のみでよい．

(1) $\cos z = -2i$ (2) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - i\right)$ (3) $(-1 + \sqrt{3}i)^{2+i}$

- 3 次の複素積分の値を求めよ．

(1) $\int_C \bar{z} dz$ $C : z = t^2 + it^3 \quad (-1 \leq t \leq 2)$

(2) $\int_{C_1+C_2} z^2 \operatorname{Im} z dz$ $C_1 : z = t + i \quad (0 \leq t \leq 1), \quad C_2 : z = \frac{1}{t} + it \quad (1 \leq t \leq 3)$

(3) $\int_C |z|^2 dz$ $C : z = t + i \cos t \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$

(4) $\int_C \operatorname{Re} z |dz|$ $C : z = 2t + 1 + it^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$

解答用紙の裏面使用可

1 次の複素積分の値を求めよ .

$$(1) \int_{C_1+C_2} \operatorname{Re} z dz \quad C_1 : z = t + it^2 \quad (0 \leq t \leq 1), \quad C_2 : z = \frac{1}{t} + it \quad (1 \leq t \leq 3)$$

$$(2) \int_C |z|^2 dz \quad C : z = \cos^2 t + it \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

2 次の積分を求めよ . ただし , 積分経路は正の向きとする .

$$(1) \int_{|z|=3} \frac{z^3 + 1}{z(z-2)} dz \quad (2) \int_{|z+1|=1} \frac{z^2}{(z+1)^2(z-2)} dz$$

$$(3) \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^2(z+3)} dz \quad (4) \int_{|z|=3} \frac{z^2 - 5z + 3}{z^3 - 3z^2 + 4} dz$$

$$(5) \int_{|z-i|=1} \frac{1}{(4z^2 + 1)^3} dz \quad (6) \int_{|z|=4} \frac{z}{(2z-i)(z^2-9)^2} dz$$

3 $R > 0$ を十分大きくとる . $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 4}$ と

$$C_1 : z = x \quad (-R \leq x \leq R),$$

$$C_2 : z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

$$C_3 : z - 2i = e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

を考えることにより , $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4} dx$ を求めよ .

解答用紙の裏面使用可

- 1 次関数の $z = 0$ を中心とする Laurent 展開を与えられた範囲で求めよ．
答のみでよい．

$$(1) \frac{1}{z^3(z-2)^2} \quad (0 < |z| < 2) \quad (2) \frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad (1 < |z| < 2)$$

- 2 次の場合に，留数 $\text{Res}[f, a]$ を求めよ．答のみでよい．

$$(1) f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z+3)^2}, \quad a=1 \quad (2) f(z) = \frac{z^2+1}{4z^3-17z^2+4z}, \quad a=\frac{1}{4}$$

$$(3) f(z) = \frac{z^2}{(z^2+4)(z+1)^2}, \quad a=-1 \quad (4) f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z}, \quad a=0$$

$$(5) f(z) = \frac{e^z}{z^{n+1}(1-z)}, \quad a=0 \quad (\text{ただし } n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$

- 3 次の積分を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする．答のみでよい．

$$(1) \int_{|z|=2} \frac{2z+1}{z(z-3)} dz \quad (2) \int_{|z|=3} \frac{z^2}{(z+2)(z-1)} dz$$

$$(3) \int_{|z|=3} \frac{z}{(z-i)(z+2i)} dz \quad (4) \int_{|z|=1} \frac{z^4+1}{(2z+1)(z+2)} dz$$

$$(5) \int_{|z|=2} \frac{\cos \pi z}{3z^2-4z+1} dz \quad (6) \int_{|z+1|=1} \frac{z^2}{(z+1)^2(z-2)} dz$$

$$(7) \int_{|z|=2} \frac{z^3+3z+1}{z^2(z^2-5)} dz \quad (8) \int_{|z|=2} \frac{z+1}{z^2(z-1)^3} dz$$

- 4 次の積分を求めよ．

$$(1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{5-3\cos \theta} d\theta \quad (2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+2x+2)} dx$$