$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \quad (z = x+iy)$ とする．

(1) $u(x,y) = e^y(x\cos x + y\sin x + \sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

(2) $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2+x+y}{(x+1)^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{x+y+1}{(x+1)^2+y^2}$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．**答のみでよい．**

(3) $u(x,y) = 2x^4 - 3y^3 + 3y^2$, $v(x,y) = 2x^3y - 2x^3 + 3xy^2$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．**答のみでよい．**

(4) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$（定数）のとき，f は D で定数であることを示せ．

$\boxed{2}$ (1) は方程式をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求め，(2) と (3) は値を求めよ．

(1) $\cos 2z + 9\cos z - 4 = 0$　　(2) $\sin\left(2i - \dfrac{5}{6}\pi\right)$　　(3) $\left(-1+\sqrt{3}\,i\right)^{-1+2i}$

$\boxed{3}$ 実数における Maclaurin（マクローリン）展開を用い，形式的計算でかまわないから，Euler（オイラー）の公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

を導け．

平成 23 年度前期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 以下において $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする．ただし，$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ で u,v は実数値とする．

(1) $u(x,y)=4x^3+6x^2-\dfrac{y^4}{4}$, $v(x,y)=xy^3+y^3$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．**答のみでよい．**

(2) $u(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．**答のみでよい．**

(3) f が領域 D で正則で $|f|=1$ のとき，f は D で定数であることを示せ．

$\boxed{2}$ (1) は方程式をみたす $z\in\mathbb{C}$ を求め，(2) と (3) は値を求めよ．**答のみでよい．**

(1) $\sin z=6$　　(2) $\tan 2i$　　(3) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{2-3i}$

$\boxed{3}$ 次の複素積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_C z\mathrm{Im}z\,dz$　　$C: z=t^2-it \quad (-1\leqq t\leqq 2)$

(2) $\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz$　　$C: z=t+\dfrac{i}{t} \quad (1\leqq t\leqq 2)$

(3) $\displaystyle\int_C (\mathrm{Re}z)^2dz$　　$C: z=\sin t+it^2 \quad \left(0\leqq t\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

平成 23 年度後期中間試験

$\boxed{1}$ 次の積分を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする．

(1) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{z^2+5}{z(z+3)}dz$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{(z^2+1)(z-3)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cos \pi z}{z(3z+2)}dz$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z+3}{z(2z+1)(z-5)}dz$

(5) $\displaystyle\int_{|z+3|=2} \frac{z+2}{(z-1)(z+3)^2}dz$

(6) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2-2z+3}{z^3-3z^2+4}dz$

(7) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{1}{(z-1)(z+2)^2(z-3)^3}dz$

$\boxed{2}$ $R>0$ を十分大きくとる．$f(z)=\dfrac{z^3e^{iz}}{(z^2+9)^2}$ と

$$\begin{aligned}
&C_1 : z = x \quad (-R \leqq x \leqq R),\\
&C_2 : z = Re^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi),\\
&C_3 : z-3i = e^{i\theta} \quad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)
\end{aligned}$$

を考えることにより，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{(x^2+9)^2}dx$ を求めよ．

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次の関数の $z=0$ を中心とする Laurent（ローラン）展開を与えられた範囲で求めよ.

(1) $\dfrac{1}{z^2(z-3)^3} \quad (0<|z|<3)$ (2) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)} \quad (2<|z|<3)$

$\boxed{2}$ 次の場合に，留数 $\mathrm{Res}[f,a]$ を求めよ.

(1) $f(z)=\dfrac{z^3+3i}{(z-i)(z+2i)},\ a=-2i$ (2) $f(z)=\dfrac{\cos\pi z}{6z^3-z^2-z},\ a=-\dfrac{1}{3}$

(3) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-3)^2},\ a=3$ (4) $f(z)=z\sinh\dfrac{1}{z},\ a=0$

$\boxed{3}$ 次の積分を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする.

(1) $\displaystyle\int_{|z-5|=1}\frac{4z+3}{(z-5)(z+2)}dz$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=\sqrt{6}}\frac{1}{z(z-1)(z+2)(z-3)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z^4+1}{(2z+1)(z-2)}dz$ (4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{2z-1}{z(4z+1)(z-3)}dz$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{z^2(z+3)}dz$ (6) $\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}dz$

(7) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{1}{z^3(z^2-4)}dz$ (8) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{\sin z-e^{2z}}{z^4}dz$

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{2\cos\theta}{17-8\cos\theta}d\theta$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+13x^2+36}dx$