科目名	微積分学	対象	1OB-AB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 1 月 27 日 (月) 2 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	60 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

平成 25 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $f(x,y)=\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{3}y^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2+2xy$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) $x^3+y^3-xy=1$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1}\left\{\int_{x-1}^{x^2}(7y-x)dy\right\}dx$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\int_{1}^{x}\frac{x^2}{y}dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{4}\left(\int_{\sqrt{x}}^{2}e^{-\frac{y^3}{4}}dy\right)dx$ （順序変更）

(4) $\displaystyle\int\int_{D}\frac{y^3}{x^2}dxdy \quad (D: 1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ -x\leqq y\leqq \sqrt{3}x)$

(5) $\displaystyle\int\int_{D}(9x-5y)dxdy \quad (D: x\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0)$

東京理科大学　年　月　日　**試験答案**　評点

科目名		担当	先生
所属 学籍番号	学部　学科　番	氏名	H25KT

1

$f(x,y)=\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{3}y^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2+2xy$

(1) $\begin{cases} f_x = 5x^2+3x+2y = 0 & —① \\ f_y = 5y^2+3y+2x = 0 & —② \end{cases}$

①−②より　$5(x-y)(x+y)+(x-y)=0$

$(x-y)\{5(x+y)+1\}=0$　∴ $x=y$ or $x+y=-\frac{1}{5}$

(i) $x=y$ のとき，①より　$5x^2+5x=0$

$5x(x+1)=0$　∴ $x=0,-1$

(ii) $x+y=-\frac{1}{5}$ のとき，①+②より

$5\{(x+y)^2-2xy\}+5(x+y)=0$

$5\left(\frac{1}{25}-2xy\right)-1=0$　∴ $xy=-\frac{2}{25}$

これらより，x, y は t の2次方程式 $t^2+\frac{1}{5}t-\frac{2}{25}=0$ の解である。

実際に解くと

$25t^2+5t-2=0$

$(5t-1)(5t+2)=0$　∴ $t=\frac{1}{5},-\frac{2}{5}$

以上(i),(ii)より，停留点は

$(0,0)$，$(-1,-1)$，$\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$，$\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$

(2) $f_{xx}=10x+3$，$f_{yy}=10y+3$，$f_{xy}=2$

$H=(10x+3)(10y+3)-2^2$

・$H(0,0)=3\cdot3-2^2=5>0$，$f_{xx}(0,0)=3>0$

∴ $f(0,0)=0$ ：極小値

・$H(-1,-1)=(-7)\cdot(-7)-2^2=45>0$，$f_{xx}(-1,-1)=-7<0$

∴ $f(-1,-1)=\frac{5}{3}$ ：極大値

・$H\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)=5\cdot(-1)-2^2=-9<0$

∴ $f\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$ ：極値でない

・$H\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)=(-1)\cdot5-2^2=-9<0$

∴ $f\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ ：極値でない。

(3) $g(x,y)=x^3+y^3-xy-1$，$\Gamma: g(x,y)=0$ とおく。

$g_y=3y^2-x$ だから，$g(1,1)=0$，$g_y(1,1)=2\neq0$ である。

よって，陰関数定理より点$(1,1)$のある近傍U内では

y は x の C^∞ 級関数 $y=\varphi(x)$ となり

$\varphi(1)=1$，$x^3+\varphi(x)^3-x\varphi(x)=1$ —③

をみたす。

③の両辺を x で微分して

$3x^2+3\varphi^2\cdot\varphi'-1\cdot\varphi-x\cdot\varphi'=0$

$3x^2+3\varphi^2\varphi'-\varphi-x\varphi'=0$ —④

$x=1$ を代入して

$3\cdot1^2+3\cdot1^2\cdot\varphi'(1)-1-1\cdot\varphi'(1)=0$　∴ $\varphi'(1)=-1$

④の両辺を x で微分して

$6x+(6\varphi\cdot\varphi')\cdot\varphi'+3\varphi^2\cdot\varphi''-\varphi'-1\cdot\varphi'-x\cdot\varphi''=0$

$6x+6\varphi(\varphi')^2+3\varphi^2\varphi''-2\varphi'-x\varphi''=0$

$x=1$ を代入して

$6\cdot1+6\cdot1\cdot(-1)^2+3\cdot1^2\cdot\varphi''(1)-2\cdot(-1)-1\cdot\varphi''(1)=0$

∴ $\varphi''(1)=-7$

さて，U内では

$f|_\Gamma(x,y)=f(x,\varphi(x))$

$=\frac{5}{3}x^3+\frac{5}{3}\varphi(x)^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\varphi(x)^2+2x\varphi(x)$

$=\frac{5}{3}\{x^3+\varphi(x)^3\}+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\varphi(x)^2+2x\varphi(x)$

$=\frac{5}{3}\{x\varphi(x)+1\}+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\varphi(x)^2+2x\varphi(x)$

$=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\varphi(x)^2+\frac{11}{3}x\varphi(x)+\frac{5}{3}$

となるから，これを $F(x)$ とおき，$F(x)$ が $x=1$ で極値をとるかどうか調べればよい。

$F(x)=\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\varphi^2+\frac{11}{3}x\varphi+\frac{5}{3}$

$F'(x)=3x+3\varphi\cdot\varphi'+\frac{11}{3}\cdot\varphi+\frac{11}{3}x\cdot\varphi'$

だから

$F'(1)=3\cdot1+3\cdot1\cdot(-1)+\frac{11}{3}\cdot1+\frac{11}{3}\cdot1\cdot(-1)=0$

また

$F''(x)=3+3\varphi'\cdot\varphi'+3\varphi\cdot\varphi''+\frac{11}{3}\varphi'+\frac{11}{3}\cdot\varphi'+\frac{11}{3}x\cdot\varphi''$

$=3+3(\varphi')^2+3\varphi\varphi''+\frac{22}{3}\varphi'+\frac{11}{3}x\varphi''$

だから

$F''(1)=3+3\cdot(-1)^2+3\cdot1\cdot(-7)+\frac{22}{3}\cdot(-1)+\frac{11}{3}\cdot1\cdot(-7)$

$=-48<0$

∴ $F(1)=\frac{25}{3}$ ：極大値

$\boxed{2}$

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{1}\left\{\int_{x-1}^{x^2}(7y-x)\,dy\right\}dx$

$\displaystyle = \int_{-2}^{1}\left[\frac{7}{2}y^2 - xy\right]_{y=x-1}^{y=x^2}dx$

$\displaystyle = \int_{-2}^{1}\left[\frac{7}{2}\{x^4-(x-1)^2\} - x\{x^2-(x-1)\}\right]dx$

$\displaystyle = \int_{-2}^{1}\left\{\frac{7}{2}x^4 - \frac{7}{2}(x-1)^2 - x^3 + x^2 - x\right\}dx$

$\displaystyle = \left[\frac{7}{10}x^5 - \frac{7}{6}(x-1)^3 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1}$

$\displaystyle = \frac{7}{10}\{1-(-32)\} - \frac{7}{6}\{0-(-27)\} - \frac{1}{4}(1-16) + \frac{1}{3}\{1-(-8)\} - \frac{1}{2}(1-4)$

$\displaystyle = -\frac{3}{20}$

(2) $\displaystyle\int_{1}^{2}\left(\int_{1}^{x}\frac{x^2}{y}dy\right)dx$

$\displaystyle = \int_{1}^{2}\left[x^2\log y\right]_{y=1}^{y=x}dx$

$\displaystyle = \int_{1}^{2}x^2(\log x - 0)\,dx$

$\displaystyle = \int_{1}^{2}x^2\log x\,dx$

$\log x \quad \frac{x^3}{3}$

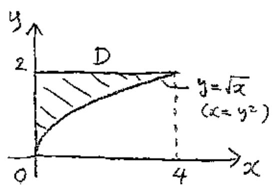
$\frac{1}{x} \quad x^2$

$\displaystyle = \left[\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}\right]_{1}^{2}$

$\displaystyle = \frac{1}{3}(8\log 2 - 1\cdot 0) - \frac{1}{9}(8-1)$

$\displaystyle = \frac{8}{3}\log 2 - \frac{7}{9}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{4}\left(\int_{\sqrt{x}}^{2}e^{-\frac{y^3}{4}}dy\right)dx$



(積分領域は

$D: 0 \leqq x \leqq 4,\ \sqrt{x} \leqq y \leqq 2$

であるが、これは

$D: 0 \leqq y \leqq 2,\ 0 \leqq x \leqq y^2$

でもあるから)

$\displaystyle = \int_{0}^{2}\left(\int_{0}^{y^2}e^{-\frac{y^3}{4}}dx\right)dy$

$\displaystyle = \int_{0}^{2}\left[xe^{-\frac{y^3}{4}}\right]_{x=0}^{x=y^2}dy$

$\displaystyle = \int_{0}^{2}y^2e^{-\frac{y^3}{4}}dy$

$\displaystyle = -\frac{4}{3}\int_{0}^{2}e^{-\frac{y^3}{4}}\cdot\left(-\frac{3}{4}y^2\right)dy$

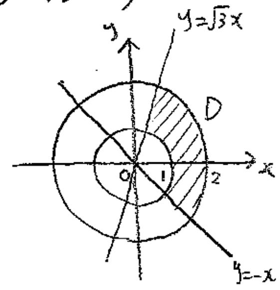
$\displaystyle = -\frac{4}{3}\left[e^{-\frac{y^3}{4}}\right]_{0}^{2}$

$\displaystyle = -\frac{4}{3}(e^{-2}-1)$

$\displaystyle = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

(4), (5) は $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} r \geqq 0 \\ \theta : 1周分 \end{matrix}\right)$ とおく.

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{y^3}{x^2}\,dxdy$ $(D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ -x \leqq y \leqq \sqrt{3}x)$



$\displaystyle = \iint_{D'}\frac{r^3\sin^3\theta}{r^2\cos^2\theta}\cdot r\,drd\theta$ $\left(D': 1 \leqq r \leqq 2,\ -\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$

$\displaystyle = \iint_{D'}r^2\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}drd\theta$

$\displaystyle = \int_{1}^{2}r^2dr \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1-\cos^2\theta)\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$

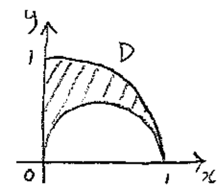
$\displaystyle = \left[\frac{r^3}{3}\right]_{1}^{2} \times \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(-\frac{-\sin\theta}{\cos^2\theta} - \sin\theta\right)d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{3}(8-1) \times \left[\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$\displaystyle = \frac{7}{3}\left\{(2-\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

$\displaystyle = \frac{7}{3}\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \quad = \frac{35}{6} - \frac{7}{\sqrt{2}}$

(5) $\displaystyle\iint_D (9x-5y)\,dxdy$ $(D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$



$\displaystyle = \iint_{D'}(9r\cos\theta - 5r\sin\theta)\cdot r\,drd\theta$

$\left(D': 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$

$\displaystyle = \iint_{D'}r^2(9\cos\theta - 5\sin\theta)\,drd\theta$

$\displaystyle = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{\cos\theta}^{1}r^2(9\cos\theta - 5\sin\theta)\,dr\right\}d\theta$

$\displaystyle = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}(9\cos\theta - 5\sin\theta)\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$

$\displaystyle = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(1-\cos^3\theta)(9\cos\theta - 5\sin\theta)\,d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\{9\cos\theta - 5\sin\theta - 9\cos^4\theta - 5\cos^3\theta\cdot(-\sin\theta)\}d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(9\cdot 1 - 5\cdot 1 - 9\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} - \left[\frac{5}{4}\cos^4\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left\{4 - \frac{27}{16}\pi - \frac{5}{4}(0-1)\right\}$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(\frac{21}{4} - \frac{27}{16}\pi\right)$

$\displaystyle = \frac{7}{4} - \frac{9}{16}\pi$

科目名	微積分学	対象	1OB-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 25 年 1 月 16 日 (水) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	60 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

平成 24 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $f(x,y)=x^4+y^4-5x^2-5y^2+6xy$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) $x^3+y^3=2$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_2^{2x}\frac{x}{y}dy\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_{-x^2}^{x}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{2\sqrt{x}}^{2}\sqrt{y^3+1}\,dy\right)dx$ （順序変更）

(4) $\displaystyle\int\int_D\frac{y^4}{x^2}dxdy \quad \left(D:1\leqq x^2+y^2\leqq 4,\ \frac{x}{\sqrt{3}}\leqq y\leqq\sqrt{3}x\right)$

(5) $\displaystyle\int\int_D(2x+y)dxdy \quad (D:x\leqq x^2+y^2\leqq 1,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0)$

東京理科大学　平成　　年　　月　　日　**試験答案**　　　　評点

科目名		担当	先生
該当学部を○で囲む　理学部 1 / 工学部 2	部　学科　年　番	氏名	H24 KT

$\boxed{1}$ $f = x^4 + y^4 - 5x^2 - 5y^2 + 6xy$

(1) $\begin{cases} f_x = 4x^3 - 10x + 6y = 0 & \text{— ①} \\ f_y = 4y^3 - 10y + 6x = 0 & \text{— ②} \end{cases}$

① − ② より

$4(x^3 - y^3) - 16(x - y) = 0$

$\cancel{4}(x-y)\{(x^2+xy+y^2) - 4\} = 0$

∴ $y = x$ or $x^2 + xy + y^2 = 4$ — ③

① + ② より

$4(x^3+y^3) - 4(x+y) = 0$

$\cancel{4}(x+y)\{(x^2-xy+y^2) - 1\} = 0$

∴ $y = -x$ or $x^2 - xy + y^2 = 1$ — ④

(i) $y = x$ かつ $y = -x$ のとき $x = y = 0$

(ii) $y = x$ かつ ④ のとき $x^2 = 1$ ∴ $x = \pm 1$

(iii) $y = -x$ かつ ③ のとき $x^2 = 4$ ∴ $x = \pm 2$

(iv) ③ かつ ④ のとき，辺々加えて $xy = \frac{3}{2}$

④より $(x-y)^2 = (x^2 - xy + y^2) - xy = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} < 0$ 不適

(i)〜(iv)より，停留点は

$(0,0)$，$(\pm 1, \pm 1)$，$(\pm 2, \mp 2)$ (同)

(2) $f_{xx} = 12x^2 - 10$，$f_{yy} = 12y^2 - 10$，$f_{xy} = 6$

$H = (12x^2 - 10)(12y^2 - 10) - 6^2 = 4\{(6x^2-5)(6y^2-5) - 9\}$

・$H(0,0) = 4 \cdot 16 = 64 > 0$，$f_{xx}(0,0) = -10 < 0$

∴ $f(0,0) = 0$ ： 大

・$H(\pm 1, \pm 1) = 4 \cdot (-8) = -32 < 0$

∴ $f(\pm 1, \pm 1)$ ： × (同)

・$H(\pm 2, \mp 2) = 4 \cdot 352 = 1408 > 0$，$f_{xx}(\pm 2, \mp 2) = 38 > 0$

∴ $f(\pm 2, \mp 2) = -32$ ： 小

(3) $g = x^3 + y^3 - 2$，$\Gamma : g = 0$ とおくと $g(1,1) = 0$

また，$g_y = 3y^2$ より $g_y(1,1) = 3 \neq 0$

よって，陰関数定理より，$(1,1)$ のある開近傍 U 内では，y は x の C^∞ 級関数 $y = \varphi(x)$ となり

$\varphi(1) = 1$，$x^3 + \varphi(x)^3 = 2$ — ⑤

をみたす

⑤の両辺を x で微分すると

$3x^2 + 3\varphi^2 \cdot \varphi' = 0$

∴ $x^2 + \varphi^2 \varphi' = 0$ — ⑥

⑥で $x = 1$ とすると

$1 + 1^2 \cdot \varphi'(1) = 0$ ∴ $\varphi'(1) = -1$

また，⑥の両辺を x で微分すると

$2x + (2\varphi \cdot \varphi') \cdot \varphi' + \varphi^2 \cdot \varphi'' = 0$

∴ $2x + 2\varphi(\varphi')^2 + \varphi^2 \varphi'' = 0$ — ⑦

⑦で $x = 1$ とすると

$2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 + 1^2 \cdot \varphi''(1) = 0$ ∴ $\varphi''(1) = -4$

さて，U 内では，Γ に制限した f は

$f|_\Gamma = f(x, \varphi(x))$

$= x^4 + \varphi(x)^4 - 5x^2 - 5\varphi(x)^2 + 6x\varphi(x)$

となる．これを $F(x)$ とおき，$F(x)$ が $x = 1$ で極値をとるかどうか調べればよい．

$F' = 4x^3 + 4\varphi^3 \cdot \varphi' - 10x - 10\varphi \cdot \varphi' + 6 \cdot \varphi + 6x \cdot \varphi'$

$F'(1) = 4 + 4 \cdot 1^3 \cdot (-1) - 10 - 10 \cdot 1 \cdot (-1) + 6 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) = 0$

$F'' = 12x^2 + (12\varphi^2 \cdot \varphi') \cdot \varphi' + 4\varphi^3 \cdot \varphi'' - 10 - (10\varphi') \cdot \varphi' - 10\varphi \cdot \varphi''$
$\quad + 6\varphi' + 6 \cdot \varphi' + 6x \cdot \varphi''$

$= 12x^2 + 12\varphi^2(\varphi')^2 + 4\varphi^3\varphi'' - 10 - 10(\varphi')^2 - 10\varphi\varphi''$
$\quad + 12\varphi' + 6x\varphi''$

$F''(1) = 12 + 12 \cdot 1^2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot 1^3 \cdot (-4) - 10 - 10 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot 1 \cdot (-4)$
$\quad + 12 \cdot (-1) + 6 \cdot (-4)$

$= 12 + 12 - 16 - 10 - 10 + 40 - 12 - 24$

$= -8 < 0$

∴ $F(1) = -2$ ： 大

$\boxed{2}$

$\log x \searrow \frac{x^2}{2}$, $\quad \frac{1}{x} \nwarrow x$

(1) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_2^{2x}\frac{x}{y}\,dy\right)dx = \int_1^2\left[x\log y\right]_{y=2}^{y=2x}dx = \int_1^2 x(\log 2x-\log 2)\,dx = \int_1^2 x\log x\,dx$

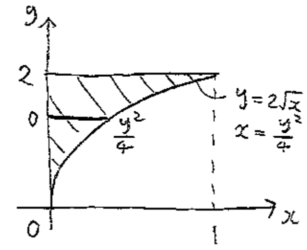
$\displaystyle = \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(4\log 2 - 1\cdot 0) - \frac{1}{4}(4-1) = 2\log 2 - \frac{3}{4}$

$\arctan x \searrow x$, $\quad \frac{1}{1+x^2} \nwarrow 1$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt3}\left(\int_{-x^2}^{x}\frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right)dx = \int_1^{\sqrt3}\left[\arctan\frac{y}{x}\right]_{y=-x^2}^{y=x}dx = \int_1^{\sqrt3}\left\{\frac{\pi}{4}-(-\arctan x)\right\}dx = \int_1^{\sqrt3}\left(\frac{\pi}{4}+\arctan x\right)dx$

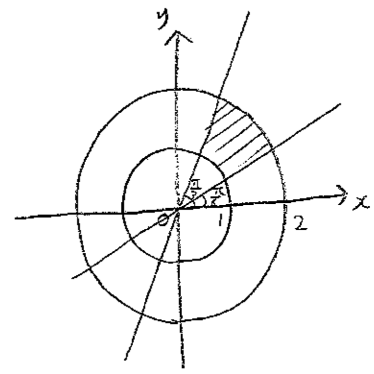
$\displaystyle = \left[\frac{\pi}{4}x + \left\{x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\}\right]_1^{\sqrt3} = \frac{\pi}{4}(\sqrt3-1) + \left(\sqrt3\cdot\frac{\pi}{3} - 1\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}(\log 4 - \log 2) = \frac{7\sqrt3}{12}\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\log 2$

(3) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{2\sqrt x}^{2}\sqrt{y^3+1}\,dy\right)dx = \int_0^2\left(\int_0^{\frac{y^2}{4}}\sqrt{y^3+1}\,dx\right)dy = \int_0^2\left[x\sqrt{y^3+1}\right]_{x=0}^{x=\frac{y^2}{4}}dy$



$\displaystyle = \int_0^2\frac{y^2}{4}\sqrt{y^3+1}\,dy = \frac{1}{12}\int_0^2 (y^3+1)^{\frac12}\cdot 3y^2\,dy = \frac{1}{12}\left[\frac{2}{3}(y^3+1)^{\frac32}\right]_0^2$

$\displaystyle = \frac{1}{18}(27-1) = \frac{26}{18} = \frac{13}{9}$



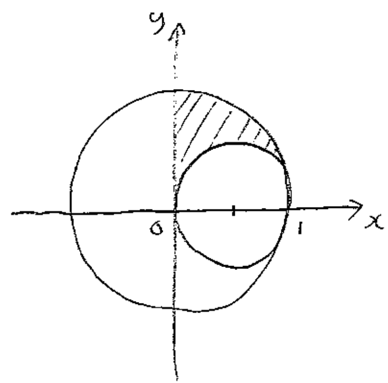
(4) $\displaystyle\iint_D \frac{y^4}{x^2}\,dx\,dy \quad \left(D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ \frac{x}{\sqrt3} \leqq y \leqq \sqrt3 x\right)$

$\displaystyle = \iint_{D'}\frac{r^4\sin^4\theta}{r^2\cos^2\theta}\cdot r\,dr\,d\theta \quad \left(D': \frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3},\ 1 \leqq r \leqq 2\right)$

$\displaystyle = \int_1^2 r^3\,dr \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(1-\cos^2\theta)^2}{\cos^2\theta}\,d\theta = \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \times \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 2 + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{4}(16-1)\left[\tan\theta - \frac{3}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{15}{4}\left\{\left(\sqrt3 - \frac{\sqrt3}{3}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\right)\right\} = \frac{15}{4}\left(\frac{2\sqrt3}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt3}{2} - \frac{15}{16}\pi$

(5) $\displaystyle\iint_D (2x+y)\,dx\,dy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$



$\displaystyle = \iint_{D'}(2r\cos\theta + r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta \quad \left(D': 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leqq r \leqq 1\right)$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{\cos\theta}^{1}(2\cos\theta + \sin\theta)r^2\,dr\right\}d\theta$

$\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{3}(2\cos\theta + \sin\theta)r^3\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta + \sin\theta)(1-\cos^3\theta)\,d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta - 2\cos^4\theta + \sin\theta - \cos^3\theta\sin\theta)\,d\theta$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(2\cdot 1 - 2\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} + 1 + \left[\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left\{3 - \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}(0-1)\right\}$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(\frac{11}{4} - \frac{3}{8}\pi\right)$

$\displaystyle = \frac{11}{12} - \frac{\pi}{8}$

科目名	微積分学	対象	1OB-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 24 年 1 月 25 日 (水) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名	
試験 時間	60 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評点

平成 23 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ $f(x,y) = x^3 + y^3 + \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}y^2 + 6xy$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) $x^2y + xy^2 = 2$ に制限した $f(x,y)$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^2 \left(\int_1^x \frac{x}{y} dy \right) dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_x^{x^2} \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) dx$

(3) $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}}^1 e^{-y^2} dy \right) dx$ （順序変更）

(4) $\displaystyle\int\int_D \frac{y^2}{x^2} dxdy \quad \left(D : 1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4,\ -\frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq \sqrt{3}x \right)$

(5) $\displaystyle\int\int_D (x+y) dxdy \quad (D : x \leqq x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

H23後・定

$\boxed{1}$ (3) $x^2y + xy^2 = 2$ に制限した $f(x,y) = x^3 + y^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2 + 6xy$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ。

(解) $g(x,y) = x^2y + xy^2 - 2$, $\Gamma : g(x,y) = 0$ とおく。

$g(1,1) = 0$ であり、$g_y(x,y) = x^2 + 2xy$ より

$g_y(1,1) = 3 \neq 0$ だから、陰関数定理より

$(1,1)$ のある近傍 U 内では y は x の C^∞ 級関数

$y = \varphi(x)$ となり、

$$\varphi(1) = 1, \quad x^2\varphi(x) + x\varphi(x)^2 = 2 \quad \cdots ①$$

をみたす。ここで、① を微分すると

$$2x\cdot\varphi(x) + x^2\cdot\varphi'(x) + 1\cdot\varphi(x)^2 + x\cdot\{2\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\} = 0$$

$$\therefore 2x\varphi(x) + x^2\varphi'(x) + \varphi(x)^2 + 2x\varphi(x)\varphi'(x) = 0 \quad \cdots ②$$

② に $x=1$ を代入して

$$2\cdot1\cdot\varphi(1) + 1^2\cdot\varphi'(1) + \varphi(1)^2 + 2\cdot1\cdot\varphi(1)\cdot\varphi'(1) = 0$$

$$2 + \varphi'(1) + 1 + 2\varphi'(1) = 0 \qquad \therefore \varphi'(1) = -1$$

また、② を微分すると

$$2\cdot\varphi(x) + 2x\cdot\varphi'(x) + 2x\cdot\varphi'(x) + x^2\cdot\varphi''(x) + 2\varphi(x)\cdot\varphi'(x) + 2\cdot\varphi(x)\varphi'(x) + 2x\cdot\varphi'(x)\cdot\varphi'(x) + 2x\varphi(x)\cdot\varphi''(x) = 0$$

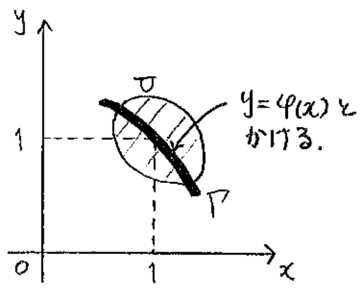
$$\therefore 2\varphi(x) + 4x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x) + 4\varphi(x)\varphi'(x) + 2x\varphi'(x)^2 + 2x\varphi(x)\varphi''(x) = 0 \quad \cdots ③$$

③ に $x=1$ を代入して

$$2\varphi(1) + 4\cdot1\cdot\varphi'(1) + 1^2\cdot\varphi''(1) + 4\varphi(1)\varphi'(1) + 2\cdot1\cdot\varphi'(1)^2 + 2\cdot1\cdot\varphi(1)\varphi''(1) = 0$$

$$2 - 4 + \varphi''(1) - 4 + 2 + 2\varphi''(1) = 0 \qquad \therefore \varphi''(1) = \frac{4}{3}$$

(イメージ)

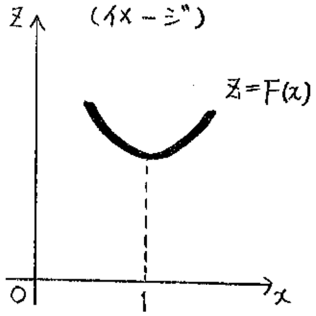


さて、U 内では、Γ に制限した $f(x,y)$ は

$$f|_\Gamma(x,y) = f(x, \varphi(x))$$
$$= x^3 + \varphi(x)^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{2}\varphi(x)^2 + 6x\varphi(x)$$

となる。これを $F(x)$ とおき、$F(x)$ が $x=1$ で極値をとるかどうか調べればよい。

(イメージ)



$$F'(x) = 3x^2 + 3\varphi(x)^2\cdot\varphi'(x) + 9x + 9\varphi(x)\cdot\varphi'(x) + 6\cdot\varphi(x) + 6x\cdot\varphi'(x)$$

$$F'(1) = 3\cdot1^2 + 3\varphi(1)^2\varphi'(1) + 9\cdot1 + 9\varphi(1)\varphi'(1) + 6\varphi(1) + 6\cdot1\cdot\varphi'(1)$$
$$= 3 - 3 + 9 - 9 + 6 - 6$$
$$= 0$$

$$F''(x) = 6x + \{6\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\}\cdot\varphi'(x) + 3\varphi(x)^2\cdot\varphi''(x) + 9 + 9\varphi'(x)\cdot\varphi'(x) + 9\varphi(x)\cdot\varphi''(x) + 6\varphi'(x) + 6\cdot\varphi'(x) + 6x\cdot\varphi''(x)$$
$$= 6x + 6\varphi(x)\varphi'(x)^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x) + 9 + 9\varphi'(x)^2 + 9\varphi(x)\varphi''(x) + 12\varphi'(x) + 6x\varphi''(x)$$

$$F''(1) = 6\cdot1 + 6\varphi(1)\varphi'(1)^2 + 3\varphi(1)^2\varphi''(1) + 9 + 9\varphi'(1)^2 + 9\varphi(1)\varphi''(1) + 12\varphi'(1) + 6\cdot1\cdot\varphi''(1)$$
$$= 6 + 6 + 4 + 9 + 9 + 12 - 12 + 8$$
$$= 42 > 0 \qquad (\Rightarrow F(x) \text{ は } x=1 \text{ の近くで下に凸})$$

よって、$F(1) = 1 + 1 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 6 = 17$: 極小値

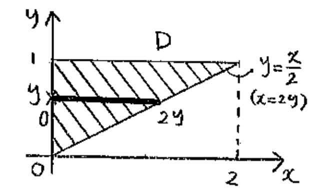
$\boxed{2}$

(1) $$\int_1^2\left(\int_1^x \frac{x}{y}dy\right)dx = \int_1^2 \Big[x\log y\Big]_{y=1}^{y=x}dx = \int_1^2 x\log x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\log 2 - \frac{3}{4}$$

(2) $$\int_1^{\sqrt3}\left(\int_x^{x^2}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx = \int_1^{\sqrt3}\left[\arctan\frac{y}{x}\right]_{y=x}^{y=x^2} = \int_1^{\sqrt3}\left(\arctan x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$
$$= \left[\left\{x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right\} - \frac{\pi}{4}x\right]_1^{\sqrt3} = \frac{\sqrt3}{12}\pi - \frac{1}{2}\log 2$$

(3) $$\int_0^2\left(\int_{\frac{x}{2}}^1 e^{-y^2}dy\right)dx \quad \text{(順序変更)}$$

$\left(D : 0 \leq x \leq 2,\ \frac{x}{2} \leq y \leq 1 \xrightarrow{図} D : 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq 2y\right)$



$$= \int_0^1\left(\int_0^{2y}e^{-y^2}dx\right)dy = \int_0^1\Big[xe^{-y^2}\Big]_{x=0}^{x=2y}dy = \int_0^1 2ye^{-y^2}dy = \Big[-e^{-y^2}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$$

(4) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと (← r:原点からの距離, θ:x軸とのなす角)

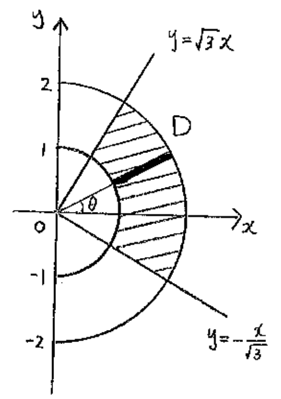
$$\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy \quad \left(D : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ -\frac{x}{\sqrt3} \leq y \leq \sqrt3 x\right)$$

$$= \iint_{D'}\frac{r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta}\cdot r\,drd\theta \quad \left(D' : -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3},\ 1 \leq r \leq 2\right)$$

Jacobian

$$= \iint_{D'} r\tan^2\theta\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_1^2 r\tan^2\theta\,dr\right)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left[\frac{r^2}{2}\tan^2\theta\right]_{r=1}^{r=2}d\theta$$

$$= \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)d\theta = \frac{3}{2}\Big[\tan\theta - \theta\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt3 - \frac{3}{4}\pi$$



(5) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと

$$\iint_D (x+y)\,dxdy \quad (D : x \leq x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0)$$

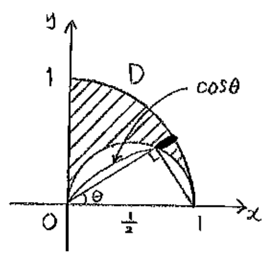
$$= \iint_{D'}(r\cos\theta + r\sin\theta)\cdot r\,drd\theta \quad \left(D' : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \cos\theta \leq r \leq 1\right)$$

$$= \iint_{D'} r^2(\cos\theta + \sin\theta)\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{\cos\theta}^1 r^2(\cos\theta + \sin\theta)dr\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}(\cos\theta + \sin\theta)\right]_{r=\cos\theta}^{r=1}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}(1 - \cos^3\theta)(\cos\theta + \sin\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta + \sin\theta - \cos^4\theta - \cos^3\theta\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{3}\left(1 + 1 - \frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2} + \left[\frac{1}{4}\cos^4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= \frac{7}{12} - \frac{\pi}{16}$$



$x \leq x^2+y^2$
$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$