§1.　命題と論理

★命題論理

命題（真偽が定まるもの）P, Q に対して，合成命題

$\neg P$	P でない（否定）
$P \wedge Q$	P かつ Q
$P \vee Q$	P または Q
$P \Rightarrow Q$	P ならば Q

の真偽を次で定める．ただし，表中の T, F はそれぞれ命題の真，偽を表す．

P	$\neg P$
T	F
F	T

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

また，2 つの命題の真偽が完全に一致するとき，これら 2 つの命題を記号「$\equiv$」で結ぶことにする．

【問題 1.1】
P, Q, R を命題とする．真理表を書いて次のことを示せ．

(1) $\neg(\neg P) \ \equiv \ P$

(2) $\neg(P \wedge Q) \ \equiv \ (\neg P) \vee (\neg Q)$

(3) $\neg(P \vee Q) \ \equiv \ (\neg P) \wedge (\neg Q)$

(4) $P \Rightarrow Q \ \equiv \ (\neg P) \vee Q$

(5) $P \Rightarrow Q \ \equiv \ (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$

(6) $P \wedge (Q \vee R) \ \equiv \ (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

(7) $P \vee (Q \wedge R) \ \equiv \ (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(8) $P \Rightarrow (Q \vee R) \ \equiv \ (P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow R$

(9) $P \ \equiv \ (\neg P) \Rightarrow (Q \wedge (\neg Q))$

(10) $P \Rightarrow Q \ \equiv \ (P \wedge (\neg Q)) \Rightarrow (R \wedge (\neg R))$

【問題 1.2】
P, Q, R を命題とする．次の合成命題の真偽を調べよ．

(1) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$

(2) $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \vee Q) \Rightarrow R)$

(3) $(\neg(P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow (\neg Q))$

(4) $(P \vee Q) \Rightarrow ((\neg P) \Rightarrow R)$

(5) $((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow (\neg Q))) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

★述語論理
命題が変数 x を含むとき，変数 x に着目したものを $p(x)$ で表し，x を変数とする述語という．
変数が 2 つ以上でも同じ．

定義
$p(x), q(x)$ を述語とする．

(1) すべての x に対して $p(x)$ である，ということを

$$\forall x[p(x)]$$

とかく．この命題は，すべての x に対して $p(x)$ が真となるときのみ真となる．

(2) ある x に対して $p(x)$ である，ということを

$$\exists x[p(x)]$$

とかく．この命題は，ある x に対して $p(x)$ が真となるときのみ真となる．

(3) $q(x)$ をみたすすべての x に対して $p(x)$ である，ということを

$$\forall x(q(x))[p(x)]$$

とかく．

$$\forall x(q(x))[p(x)] \ \equiv\ \forall x[q(x) \Rightarrow p(x)]$$

である．

(4) $q(x)$ をみたすある x に対して $p(x)$ である，ということを

$$\exists x(q(x))[p(x)]$$

とかく．

$$\exists x(q(x))[p(x)] \ \equiv\ \exists x[q(x) \wedge p(x)]$$

である．

ド・モルガン
定理（De Morgan）
$p(x), q(x)$ を述語とするとき，次が成り立つ．

(1) $\neg(\forall x[p(x)]) \ \equiv\ \exists x[\neg p(x)]$

(2) $\neg(\exists x[p(x)]) \ \equiv\ \forall x[\neg p(x)]$

(3) $\neg(\forall x(q(x))[p(x)]) \ \equiv\ \exists x(q(x))[\neg p(x)]$

(4) $\neg(\exists x(q(x))[p(x)]) \ \equiv\ \forall x(q(x))[\neg p(x)]$

【問題 1.3】
次の命題を真にするような実数 a, b の組 (a, b) を ab 平面に図示せよ．

(1) $(\forall x \in \mathbb{R})[b \leqq x \leqq 0 \implies -a^2 \leqq x \leqq a]$

(2) $(\forall x \in \mathbb{R})[a^2 \leqq x \leqq b \implies b - 1 \leqq x \leqq 2]$

(3) $(\forall x \in \mathbb{R})[a \leqq x \leqq b \implies b^2 \leqq x \leqq a + 1]$

§2.　上限・下限と数列の極限

★注意

記号 $\leqq$ は，$<$ または $=$ の意味である（数学辞典で確認できます）．通常は「順序（大小）関係」を表し，「等号」がついているからといって「必ず等号が成り立つ」という意味で使うわけではないことに注意してほしい．高校でも，例えば相加相乗平均の関係

　$a>0,\ b>0$ のとき $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成り立つ．

　等号成立は $a=b$ のときに限る．

のときにこのような使い方を経験していると思う．もちろん，「必要十分条件」や「とり得る値の範囲」で使うときは，等号をつけるかつけないかには大きな違いがある．

★上限と下限

$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ とする．

(1) $(\exists b \in \mathbb{R})(\forall a \in A)[a \leqq b]$
が成り立つとき，A は**上に有界**であるといい，このような b を A の**上界**という．また，A の上界全体に最小数があるとき，それを A の**上限**といい，$\sup A$ で表す．

(2) $(\exists b \in \mathbb{R})(\forall a \in A)[b \leqq a]$
が成り立つとき，A は**下に有界**であるといい，このような b を A の**下界**という．また，A の下界全体に最大数があるとき，それを A の**下限**といい，$\inf A$ で表す．

(3) A が上に有界かつ下に有界のときは，A は単に**有界**であるという．

★上限・下限の特徴付け

$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset,\ \alpha \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\alpha = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall a \in A)[a \leqq \alpha] \ \wedge\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)[\alpha - \varepsilon < a]$

(2) $\alpha = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad (\forall a \in A)[\alpha \leqq a] \ \wedge\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists a \in A)[a < \alpha + \varepsilon]$

公理

$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ とする．

(1) A が上に有界ならば $\sup A$ が存在する．

(2) A が下に有界ならば $\inf A$ が存在する．

命題

$A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset$ とする．

(1) $\max A$ が存在すれば $\sup A = \max A$ である．

(2) $\min A$ が存在すれば $\inf A = \min A$ である．

【問題 2.1】

次の集合 A に対して，$\sup A$, $\inf A$ を求めよ．

(1) $A = \left\{ \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n+1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(2) $A = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(3) $A = \left\{ (-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(4) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(5) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \cdot \dfrac{n+2}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(6) $A = \left\{ \dfrac{4n-1}{3n+2} + (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{n}{n+(-1)^{n-1}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(7) $A = \left\{ \dfrac{3n+5}{n+2} + (-1)^n \cdot \dfrac{n}{n+(-1)^{n-1}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

(8) $A = \left\{ \dfrac{3n+10}{n+4} + \dfrac{(-1)^n \cdot n+1}{n+(-1)^{n-1}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$

★数列の収束・発散

$\{a_n\}$ を実数列とする．

(1) $a \in \mathbb{R}$ とする．

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geqq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$

が成り立つとき，$\{a_n\}$ は a に**収束する**といい，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a$ とかく．また，a を $\{a_n\}$ の**極限値**という．

(2) $\{a_n\}$ が収束しないとき，$\{a_n\}$ は**発散する**という．発散するうち，次は極限が存在する．

(i) $(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geqq n_0 \Rightarrow a_n \geqq K]$

が成り立つとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ とかく．

(ii) $(\forall K > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})[n \geqq n_0 \Rightarrow a_n \leqq -K]$

が成り立つとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ とかく．

定理（単調数列の収束定理）

(1) 単調増加で上に有界な数列は収束する．

(2) 単調減少で下に有界な数列は収束する．

例

(1) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ とおく．数列 $\{a_n\}$ は単調増加で上に有界であるから収束する．この極限値を **Napier**(ネピア) **の数**といい e で表す．値は $e = 2.718281828459045\cdots$ である．

(2) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ $(n \in \mathbb{N})$ とおく．数列 $\{a_n\}$ は単調減少で下に有界であるから収束する．この極限値を **Euler**(オイラー) **定数**といい γ で表す．値は $\gamma = 0.577215664901532\cdots$ である．

【問題 2.2】

$\{a_n\}$ を実数列，$a \in \mathbb{R}$ とする．次を示せ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$

(2) $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$

(3) $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$

(4) $a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ のとき

(i) $0 \leqq a < 1 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(ii) $a > 1 \quad \Longrightarrow \quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

※今後これらの結果は証明なしに用いてよい．

【問題 2.3】

次の数列の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!n^n}{(2n)!}}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(3n+2)!}{(2n)!n^n}}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{(2n)!}}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(3n)^{2n}}{(2n+1)!}}$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!n^{2n}}{(3n)!}}$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!(n+1)^n}{(2n+1)!}}$　　(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(n+1)^{3n}}}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n(3n)!}{(n+1)^{4n}}}$　　(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(n+2)^{3n}}}$

【問題 2.4】

次の数列の極限を求めよ．ただし，a, p, r は正の定数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}$　　(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^p r^n$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e\sqrt{e}\sqrt[3]{e}\cdots\sqrt[n]{e}}{n}$　　(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\log\sqrt{n}\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{2n}}$

【問題 2.5】

級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ が収束することを示せ．

※ $B_0=1,\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n}{}_{n+1}\mathrm{C}_j B_j=0\ (n\in\mathbb{N})$ により定まる B_n を **Bernoulli**（ベルヌーイ） 数という．

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ B_5=0,\ B_6=\frac{1}{42},\dots$$

Bernoulli 数を用いて $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2m}}=\frac{(-1)^{m-1}B_{2m}(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}$ $(m\in\mathbb{N})$ と表されることが知られている．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},\dots$$

★Cauchy 列

数列 $\{a_n\}$ が

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall l, m \in \mathbb{N})[l, m \geqq n_0 \Rightarrow |a_l - a_m| < \varepsilon]$

をみたすとき，$\{a_n\}$ は **Cauchy 列**であるという．

定理

$\{a_n\}$ が収束 $\iff$ $\{a_n\}$ が Cauchy 列

【問題 2.6】

$(\exists r \in [0,1))(\forall n \in \mathbb{N})[\,|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqq r|a_{n+1} - a_n|\,]$

をみたす数列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列であることを示せ．

※今後この結果は証明なしに用いてよい．

【問題 2.7】

次で定まる数列 $\{a_n\}$ は収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，x は正の定数とする．

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3} \quad (n \in \mathbb{N})$

(2) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{5a_n + 36} \quad (n \in \mathbb{N})$

(3) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 - a_n + 15}{7} \quad (n \in \mathbb{N})$

(4) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 + 4}{5} \quad (n \in \mathbb{N})$

(5) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{x}{a_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$

(6) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$

§3.　関数

★関数

X, Y を実数全体 $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．X の各要素 x に対して，Y のただ 1 つの要素 y を対応させる規則 f を X から Y への**関数**といい，X, Y をそれぞれ f の**定義域**，**終域**という．f が X から Y への関数であることを $f : X \to Y$ で表す．また，x に対して定まる y を $f(x)$ で表し，対応も明記して

$$\begin{array}{cccccc} f & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

と表すこともある．そして

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ をみたす } x \in X \text{ が存在する}\} &&（正式）\\ &= \{f(x) \mid x \in X\} &&（略式）\end{aligned}$$

を f の**値域**という．

※値域は一般にすぐにはわからないから，値域ではなく大きめに終域としている．定義域と対応ははっきりさせなければいけないが，終域は $\mathbb{R}$ にしておけばよい．

★合成関数

X, Y を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．2 つの関数 $f : X \to \mathbb{R},\ g : Y \to \mathbb{R}$ に対して，$f(X) \subset Y$ であるとき，$x \in X$ に対して $g(f(x))$ を対応させる規則を f と g の**合成関数**といい $g \circ f$ で表す．

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (x \in X)$$

★逆関数

X, Y を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする．関数 $f : X \to Y$ が

$$\begin{cases} f(X) = Y & \cdots ① \\ x_1, x_2 \in X \text{ に対して，} x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたすとする．このとき，$y \in Y$ に対して，$y = f(x)$ をみたす $x \in X$ がただひとつ存在する（存在することは ① よりわかり，一意であることは ② の対偶よりわかる）．そこで，$y \in Y$ に対して，この $x \in X$ を対応させる規則を f^{-1} で表し，f の**逆関数**という．

※逆関数の性質

関数 $f : X \to Y$ とその逆関数 $f^{-1} : Y \to X$ について，次が成り立つ．

(1) $a \in Y,\ b \in X$ に対して，$b = f^{-1}(a) \iff a = f(b)$

(2) 2 曲線 $y = f(x),\ y = f^{-1}(x)$ は，直線 $y = x$ に関して対称．

(3) $(f^{-1} \circ f)(x) = x\ (x \in X), \quad (f \circ f^{-1})(x) = x\ (x \in Y)$

【問題 3.1】
次の関数の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin x}{x\sin^2 x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x(1-\cos 3x)}{\tan^3 2x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\tan 2x}-\sqrt{1+\tan 2x}}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 4x}{\sin 3x+\sin 5x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos 11x-\cos 6x}{x^2}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos 5x}-\sqrt{\cos 3x}}{x^2}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2(-\sin x+3\sin 3x)}{\tan x(\cos x-\cos 3x)}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\log(1+x)}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x\sin 3x}-1}{x\log(1+x)}$

★逆三角関数

(1) $\sin:\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]\longrightarrow[-1,1]$ の逆関数を arcsin（アークサイン）で表す．

(2) $\cos:[0,\pi]\longrightarrow[-1,1]$ の逆関数を arccos （アークコサイン）で表す．

(3) $\tan:\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$ の逆関数を arctan（アークタンジェント）で表す．

【問題 3.2】
次の値を求めよ．

(1) $\sin\left(\arctan\dfrac{12}{5}\right)$

(2) $\tan\left(\arccos\dfrac{1}{8}\right)$

(3) $\arccos\left(\sin\dfrac{\pi}{5}\right)$

(4) $\arctan\left(\tan\dfrac{4}{7}\pi\right)$

(5) $2\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{7}$

(6) $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{8}$

(7) $2\arctan\dfrac{1}{2}-\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{18}$

(8) $\arctan\dfrac{1}{3}+\arctan\dfrac{1}{5}+\arctan\dfrac{1}{7}+\arctan\dfrac{1}{8}$

(9) $\arctan\dfrac{1}{2}+\arctan\dfrac{1}{4}+\arctan\dfrac{1}{8}-\arctan\dfrac{1}{21}$

§4.　1 変数関数の微分

★逆三角関数の導関数

(1) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

(2) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

(3) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$

【問題 4.1】
次の関数を微分せよ．

(1) $\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$

(2) $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

(4) $\arctan \sqrt{x^2-1}$

(5) $\arctan \dfrac{2x+5}{5x-2}$

(6) $\arctan \dfrac{3x+4}{4x-3}$

(7) $\arctan \dfrac{3+x}{1-3x}$

(8) $\arctan \dfrac{2x+5}{x+1}$

(9) $\arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$

(10) $\arctan \sqrt{\dfrac{x+5}{x+1}}$

(11) $\arctan \sqrt{\dfrac{x+7}{x+3}}$

(12) $\arctan \sqrt{\dfrac{x-3}{5x-7}}$

(13) $\arctan \sqrt{\dfrac{2x-9}{7x+11}}$

(14) $\arctan(x + \sqrt{x^2+1})$

(15) $\arctan \dfrac{1-2x-x^2}{1+2x-x^2}$

(16) $\arcsin \sqrt{1-x^2}$

(17) $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(18) $\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$

【問題 4.2】
次の問いに答えよ．

(1) $f(x) = (\arctan x)^2$ のとき，$(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x)$ を簡単にせよ．

(2) $f(x) = \arcsin x \arccos x$ のとき，$(1-x^2)f''(x) - xf'(x)$ を簡単にせよ．

(3) $f(x) = e^{\arcsin x}$ のとき，$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) - f(x)$ を簡単にせよ．

(4) $f(x) = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$ のとき，$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + f(x)$ を簡単にせよ．

★高次導関数

開区間 I で微分可能な関数 f の導関数 f' が再び I で微分可能なとき，$(f')'$ を f の**第 2 次導関数**といい，f'' で表す．一般に，f を n 回微分した関数を f の**第 $\boldsymbol{n}$ 次導関数**といい，$f^{(n)}$ で表す．また，$f^{(0)} = f$ と定める．そして，$f^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ がすべて I で連続であるとき，f は I で $\boldsymbol{C^n}$ **級**であるという．

例

(1) $(e^x)^{(n)} = e^x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(2) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ $(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x,\ (\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(3) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

※ $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x,\ (\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(4) $\{\log(1 + x)\}^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(1 + x)^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$

(5) $\{(1 + x)^\alpha\}^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)\cdots(\alpha - n + 1)(1 + x)^{\alpha-n}$ $(n \in \mathbb{N})$

ライプニッツ
★Leibniz の公式

f, g が開区間 I で n 回微分可能なとき，積 fg も I で n 回微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．

証明

(i) $n = 1$ のとき，主張は積の微分法則に他ならないから成り立つ．

(ii) $n = m$ $(m \in \mathbb{N})$ のとき主張が成り立つと仮定する．
f, g が I で $m + 1$ 回微分可能なとき，f, g は I で m 回微分可能でもあるから，帰納法の仮定より，積 fg は I で m 回微分可能で

$$\{f(x)g(x)\}^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x) \quad (x \in I)$$

が成り立つ．この右辺はもう 1 回微分できるから，積 fg は I で $m + 1$ 回微分可能で，$x \in I$ に対して

$$\begin{aligned}
&\{f(x)g(x)\}^{(m+1)} \\
= &\left\{\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k)}(x)\right\}' \\
= &\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k \left\{f^{(m-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(m-k)}(x) g^{(k+1)}(x)\right\} \\
= &\sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k+1)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m-k)}(x) g^{(k+1)}(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{m+1} {}_m\mathrm{C}_{k-1} f^{(m-(k-1))}(x)g^{(k)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) \\
&\qquad\qquad + \sum_{k=1}^{m} {}_m\mathrm{C}_{k-1} f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(m+1)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} ({}_m\mathrm{C}_k + {}_m\mathrm{C}_{k-1}) f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(m+1)}(x) \\
&= f^{(m+1)}(x)g^{(0)}(x) + \sum_{k=1}^{m} {}_{m+1}\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x) + f^{(0)}(x)g^{(m+1)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}\mathrm{C}_k f^{(m+1-k)}(x)g^{(k)}(x)
\end{aligned}
$$

よって，$n = m + 1$ のときも主張が成り立つ．
以上 (i),(ii) より，$n \in \mathbb{N}$ に対して主張が成り立つ． ∎

【問題 4.3】
$n \in \mathbb{N}$ とする．Leibniz の公式を用いて，次を求めよ．

(1) $\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)^{(n)}$　　(2) $(x^{n-1}\log x)^{(n)}$

(3) $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$ のときの $f^{(n)}(0)$　　(4) $f(x) = \arctan x$ のときの $f^{(n)}(0)$

(5) $f(x) = \arcsin x$ のときの $f^{(n)}(0)$　　(6) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ のときの $f^{(n)}(0)$

【問題 4.4】
次の等式が成り立つことを示せ．

(1) $\arctan x + \arctan \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{\pi}{4} \quad (x > -1)$

(2) $2\arctan x + \arcsin \dfrac{2x}{x^2+1} = \pi \quad (x > 1)$

(3) $\arcsin \dfrac{2x}{x^2+1} = 2\arctan \dfrac{1}{x} \quad (x > 1)$

(4) $\arctan \dfrac{2x}{1-x^2} + 2\arctan \dfrac{1}{x} = \pi \quad (0 < x < 1)$

(5) $2\arctan(x + \sqrt{x^2+1}) + \arctan \dfrac{1}{x} = \begin{cases} \pi & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

★L’Hospital（ロピタル）の定理（1）
f, g が (a, b) で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ のとき，

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = 0, \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

であれば

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

★ L’Hospital の定理（2）
f, g が (a, ∞) で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(x > a)$ のとき，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

であれば

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

★ L’Hospital の定理（3）
f, g が (a, b) で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ のとき，

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a+0} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

であれば

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

★ L’Hospital の定理（4）
f, g が (a, ∞) で微分可能で，$g'(x) \neq 0$ $(x > a)$ のとき，

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

であれば

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

が成り立つ．

※ L’Hospital の定理は，おおざっぱにいうと次のようになる．
$\dfrac{\lim_{x \to \square} f(x)}{\lim_{x \to \square} g(x)}$ が不定形，すなわち，$\dfrac{0}{0}$ や $\dfrac{(\pm)\infty}{(\pm)\infty}$ の形になるとき，$\lim_{x \to \square} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば，
$\lim_{x \to \square} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \square} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つ．

【問題 4.5】

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\sin x}{x^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x-\sin x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - xe^x + x^2}{\sin x - x\cos x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{1+x}+1-e^x}{x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \sin x}{\arctan x - \tan x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x-\arctan x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+\log(1+x)-1}{x-\arctan x}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\log(\cos x)}{x^2\sin^2 x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 1-0}\frac{1-x}{(\arccos x)^2}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4-2x^2+x^4}-2\sqrt{\cos x}}{x^4}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sqrt{\cos x}-\tan x}{x^3}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sin x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin^3 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^4 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(17) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3}{\sin^5 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(18) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\tan x}-\frac{1}{x^2}\right)$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x}{\tan^3 x}\right)$

(21) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{\tan^4 x}\right)$

(22) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{\log(1+3x)}-\frac{1}{3x\cos x}\right\}$

(23) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-\frac{2}{x}\right)$

(24) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(25) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^x$

(26) $\displaystyle\lim_{x\to +0}(\sin x)^{\frac{1}{\log x}}$

(27) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}\ \ (a\neq 0)$

(28) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

★Taylor（テイラー） の定理

f が開区間 I で n 回微分可能で，$a, x \in I$ $(x \neq a)$ のとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n$$

をみたす θ $(0 < \theta < 1)$ が存在する．

※ $f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ を**剰余項**といい，$R_n(x)$ で表す．この場合

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

であり，これを **Lagrange**（ラグランジュ） **の剰余項**という．また

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{(n-1)!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

を **Cauchy の剰余項**といい，$p > 0$ として

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{p(n-1)!}(x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

を **Roche-Schlömilch**（ロッシュ シュレミルヒ） **の剰余項**という．Roche-Schlömilch の剰余項において，$p = 1$ のときが Cauchy の剰余項，$p = n$ のときが Lagrange の剰余項である．剰余項の形は他にもいろいろある．

定理

f が開区間 I で無限回微分可能で，$a \in I$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ をみたす $x \in I$ に対しては

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と級数で表せる．

※これを f の a を中心とする **Taylor 展開**という．特に，$a = 0$ のときを **Maclaurin**（マクローリン） **展開**という．

★代表的な関数の Maclaurin 展開

(1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{120} + \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$

(2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + \dfrac{x^9}{362880} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$

(3) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \dfrac{x^8}{40320} - \cdots \quad (x \in \mathbb{R})$

(4) $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$

(5) $(1+x)^\alpha = 1 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} \alpha \\ 3 \end{pmatrix} x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

ただし，$\alpha \neq 0, 1, 2, 3, \ldots$ とし，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

は一般二項係数である．

(6) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{5}{128}x^4 + \dfrac{7}{256}x^5 - \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{5}{16}x^3 + \dfrac{35}{128}x^4 - \dfrac{63}{256}x^5 + \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$

(8) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$

(9) $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{x^9}{9} - \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

(10) $\arcsin x = x + \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{3}{40}x^5 + \dfrac{5}{112}x^7 + \dfrac{35}{1152}x^9 + \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

【問題 4.6】

次の関数の Maclaurin 展開をかっこ内の項まで求めよ．ただし，係数は既約分数にすること．必要ならば，上の Maclaurin 展開を用いてよい．

(1) $\dfrac{\arcsin x}{1+x}$ （5 次）

(2) $\dfrac{\arctan x}{1+x^2}$ （9 次）

(3) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ （5 次）

(4) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}}$ （6 次）

(5) $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}$ （6 次）

(6) $\dfrac{\arctan x}{\sqrt{1+x}}$ （6 次）

(7) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ （5 次）

(8) $e^x\sqrt{1-x}$ （5 次）

(9) $\sqrt{1+x+x^2}$ （5 次）

(10) $\sqrt{1+x-x^2}$ （5 次）

(11) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ （5 次）

(12) $\log\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ （5 次）

(13) $\log\left(1+x-\dfrac{x^2}{3}\right)$ （5 次）

(14) $\log(1+\sin x)$ （5 次）

(15) $e^{\arctan x}$ （5 次）

(16) $e^{\arcsin x}$ （5 次）

(17) $(1+x)^x$ （6 次）

(18) $\sqrt{\cos x}$ （8 次）

(19) $\dfrac{\log(1+x)}{\cos x}$ （9 次）

(20) $\tan x$ （9 次）

★$\overset{\text{ランダウ}}{\textbf{Landau}}$ の記号

a の近くで定義された関数 f, g が

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

を満たすとき，$f(x) = o(g(x))\ (x \to a)$ と表す．$\displaystyle\lim_{x \to a} g(x) = 0$ であれば，$x \to a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ より速く 0 に収束することを意味する．

定理

I を開区間とし，$a \in I$ とする．f が I で $n-1$ 回微分可能で，$f^{(n)}(a)$ が存在するとき

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) \quad (x \to a)$$

となる．

証明

繰り返し L'Hospital の定理を用いれば

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}{(x-a)^n} = 0$$

となることがわかる． ∎

例

$x \to 0$ のとき

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3), \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

であるから

$$\begin{aligned}
& xe^x - (e^x - 1)\sqrt{1+x} \\
&= x\left\{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right\} - \left\{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right\}\left\{1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)\right\} \\
&= \left\{x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)\right\} - \left\{x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right\} \\
&= \frac{5}{24}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{x \to 0} \frac{xe^x - (e^x - 1)\sqrt{1+x}}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{5}{24}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \to 0}\left\{\frac{5}{24} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right\} = \frac{5}{24}$$

§5.　1 変数関数の積分

【問題 5.1】
次の積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \arctan x dx$

(2) $\displaystyle\int \arcsin x dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} \arctan x dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \arcsin x dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 (2x+2) \arctan x dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1 2x(\arctan x)^2 dx$

(7) $\displaystyle\int \arctan \sqrt{x} dx$

(8) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} (3x^2+1)(\arctan x)^2 dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt{3}} (3x^2+1)(\arctan x)^2 dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 2x \arcsin x dx$

(11) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2x \arcsin x dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

(13) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} dx$

(14) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1} dx$

★有理関数の積分

有理関数は部分分数分解してから積分する．部分分数分解するときは，係数比較法だけでなく数値代入法も用いて，あまり時間をかけずに確実に未定係数を求めるようにする．積分するときは

$$\int \frac{1}{a^2+(x+b)^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x+b}{a} \quad (a \neq 0)$$

を公式としてよい（左辺において $x+b=at$ と置換するか右辺を微分すれば確認できる）．また一般には，$a \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\int \frac{1}{\{a^2+(x+b)^2\}^{n+1}}dx = \frac{2n-1}{2a^2n}\int \frac{1}{\{a^2+(x+b)^2\}^n}dx + \frac{x+b}{2a^2n\{a^2+(x+b)^2\}^n}$$

が成り立つことも用いないと大変である．ちなみに，この漸化式は次のようにして導かれる．

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{\{a^2+(x+b)^2\}^{n+1}}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{\{a^2+(x+b)^2\}^{n+1}}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2+(x+b)^2-(x+b)^2}{\{a^2+(x+b)^2\}^{n+1}}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\{a^2+(x+b)^2\}^n}dx - \frac{1}{a^2}\int \frac{(x+b)^2}{\{a^2+(x+b)^2\}^{n+1}}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\{a^2+(x+b)^2\}^n}dx - \frac{1}{2a^2}\int (x+b)\frac{2(x+b)}{\{a^2+(x+b)^2\}^{n+1}}dx \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{\{a^2+(x+b)^2\}^n}dx - \frac{1}{2a^2}\left[-\frac{x+b}{n\{a^2+(x+b)^2\}^n} + \int \frac{1}{n\{a^2+(x+b)^2\}^n}dx\right] \\
&= \frac{2n-1}{2a^2n}\int \frac{1}{\{a^2+(x+b)^2\}^n}dx + \frac{x+b}{2a^2n\{a^2+(x+b)^2\}^n}
\end{aligned}$$

【問題 5.2】

次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3(x-1)}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{5x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2-x-11}{(x-3)(x^2-2x+2)}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2-7x-1}{(x-2)(x^2+2x+3)}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{-10x^2-15x+43}{(x-1)(x-2)(x^2+6x+11)}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)}dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{-8x^2-18x+2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+3)}dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{-8x^2-6x-4}{x^2(x+1)(x^2+2x+4)}dx$ (14) $\displaystyle\int \frac{8x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$

※部分分数分解の形は次のようになる．

(1) $\dfrac{14x+18}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-3}$

(2) $\dfrac{1}{x^3(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x-1}$

(3) $\dfrac{5x^2-2x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$

(4) $\dfrac{x^2-x-11}{(x-3)(x^2-2x+2)} = \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{Bx+C}{x^2-2x+2}$

(5) $\dfrac{x^2+x+3}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+2}$

(6) $\dfrac{x^2-7x-1}{(x-2)(x^2+2x+3)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+2x+3}$

(7) $\dfrac{-10x^2+5x+48}{(x-2)(x-3)(x^2+4x+6)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4x+6}$

(8) $\dfrac{7x^2+12x+65}{(x+1)(x-2)(x^2+2x+5)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2x+5}$

(9) $\dfrac{-10x^2-15x+43}{(x-1)(x-2)(x^2+6x+11)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+6x+11}$

(10) $\dfrac{8x^2-16x+15}{x^2(x^2-2x+5)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2-2x+5}$

(11) $\dfrac{2x^2-x}{(x+1)^2(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$

(12) $\dfrac{-8x^2-18x+2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+2x+3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2} + \dfrac{Dx+E}{x^2+2x+3}$

(13) $\dfrac{-8x^2-6x-4}{x^2(x+1)(x^2+2x+4)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x+1} + \dfrac{Dx+E}{x^2+2x+4}$

(14) $\dfrac{8x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} + \dfrac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$

★三角関数の有理形

$R(X, Y)$ を X, Y の有理関数とするとき，$\displaystyle\int R(\cos x, \sin x)dx$ は $t = \tan\dfrac{x}{2}$ と置換すれば

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

により，t の有理関数の積分になる．

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

※ $R(\cos x, \sin x)$ が

$$\cos 2x \ (\cos^2 x, \sin^2 x), \quad \sin 2x \ (\sin x \cos x), \quad \tan x$$

で表されるときは，$t = \tan x$ と置換する方が楽になる．このときは

$$\cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2}$$

である．

【問題 5.3】

次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{3\sin x + 4\cos x + 5}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{5\cos x + 12\sin x + 13}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{2+\sin x}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{2}{5+3\sin x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{\sin x + 3\cos x + 3}{\sin x(\sin x + \cos x + 1)}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + 1}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{3+\sin x}{\cos x(2+\cos x)}dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x}dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{1-\tan^2 x}dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{a+b\tan x}dx \quad (ab \neq 0)$

★根号を含む有理形

$R(X, Y)$ を X, Y の有理関数とする．

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \ (n \in \mathbb{N}, \ ad-bc \neq 0)$ は $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ と置換すれば

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{dt^n - b}{-ct^n + a}, t\right) \cdot \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(-ct^n+a)^2}dt$$

となり，t の有理関数の積分になる．

(2) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ $(a>0)$ は $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}\,x$ と置換すれば

$$\begin{aligned}&\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx \\ &\quad = \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \frac{\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c}{2\sqrt{a}\,t+b}\right)\cdot\frac{2(\sqrt{a}\,t^2+bt+\sqrt{a}\,c)}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}dt\end{aligned}$$

となり，t の有理関数の積分になる．

(3) $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ $(a<0)$ は，実数の範囲で考えるから $b^2-4ac>0$ であることが必要で，このとき $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ をみたす $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha<\beta)$ が存在する．x の範囲は $\alpha<x<\beta$ であって，このとき $-a>0,\ x-\alpha>0,\ \beta-x>0$ に注意すれば

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a(x-\alpha)(\beta-x)} = \sqrt{-a}\,(x-\alpha)\sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

となるから，(1) に帰着する．

【問題 5.4】

次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{x+3}\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{x+2}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}\,dx$

(6) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$

(7) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{2x^2+5x+4}}dx$

(8) $\displaystyle\int\frac{7}{(8x+3)\sqrt{x^2+x+1}}dx$

(9) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{4x^2+x+1}}dx$

(10) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-x-9}}dx$

(11) $\displaystyle\int\frac{1}{(x-2)\sqrt{x^2-5x-1}}dx$

(12) $\displaystyle\int\frac{2}{2\sqrt{x^2+1}+1}dx$

(13) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}dx$

(14) $\displaystyle\int\frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx$

(15) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}dx$

(16) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+x+1}}dx$

(17) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

(18) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{-x^2+3x-2}}dx$

★有限区間の広義積分

f が $[a,b)$ で連続で，b で非有界であるとする．$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ が有限確定するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は収束するといい，値を

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \ \left(= \lim_{c\to b-0}\int_a^c f(x)dx\right)$$

で定める．

定理

f が $[a,b)$ で連続で，b で非有界であるとき

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ が収束

$$\iff \quad (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall p,q\in[a,b))\left[b-\delta<p,q<b \ \Rightarrow \ \left|\int_p^q f(x)dx\right|<\varepsilon\right]$$

定理

f が $[a,b)$ で連続で，b で非有界であるとき

$$(\exists M>0)(\exists\alpha\in(0,1))(\forall x\in[a,b))\left[|f(x)|\leqq\frac{M}{(b-x)^\alpha}\right] \quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(x)dx \text{ は収束}$$

定理

f が $[a,b)$ で連続で，b で非有界であるとき

$$(\exists\alpha\in(0,1))\left[\lim_{x\to b-0}(b-x)^\alpha f(x) \text{ が収束}\right] \quad\Longrightarrow\quad \int_a^b f(x)dx \text{ は収束}$$

★無限区間の広義積分

f が $[a,\infty)$ で連続であるとする．$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$ が有限確定するとき，広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は収束するといい，値を

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

で定める．

定理

f が $[a,\infty)$ で連続であるとき

$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ が収束

$$\iff \quad (\forall\varepsilon>0)(\exists R>0)(\forall p,q\in[a,\infty))\left[p,q\geqq R \ \Rightarrow \ \left|\int_p^q f(x)dx\right|<\varepsilon\right]$$

定理

f が $[a,\infty)$ で連続であるとき

$$(\exists M>0)(\exists\alpha>1)(\forall x\text{：十分大})\left[|f(x)|\leqq\frac{M}{x^\alpha}\right] \quad\Longrightarrow\quad \int_a^\infty f(x)dx \text{ は収束}$$

定理

f が $[a,\infty)$ で連続であるとき

$$(\exists\alpha>1)\left[\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}f(x)\text{ が収束}\right] \quad\Longrightarrow\quad \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ は収束}$$

★有名な広義積分

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

(3) $\overset{ベータ}{\text{Beta}}$ 関数

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p>0,\ q>0)$$

(4) $\overset{ガンマ}{\text{Gamma}}$ 関数

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}dx \quad (s>0)$$

【問題 5.5】

次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}xe^{-2x}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{\sqrt{x}}dx$

(5) $\displaystyle\int_e^{\infty}\frac{\log x}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^3(2x+1)\log x dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-3x}\cos x dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2-x+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_{-2}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx$

(10) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log x}{(x+1)^2}dx$

(11) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{(x+1)^2}dx$

(12) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log x}{(x+1)^3}dx$

(13) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$

(14) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x^4}dx$

(15) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x^3+1}dx$

(16) $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{4}{x^4+x^2+1}dx$

§6.　2 変数関数の偏微分

★開集合で定義された関数の極値
$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，$f : O$ で C^2 級，$(a,b) \in O$ とする．

(1) $f(a,b)$ が（広義の）極値　$\Longrightarrow$　$f_x(a,b) = 0,\ f_y(a,b) = 0$

※ $f_x(a,b) = 0,\ f_y(a,b) = 0$ を満たす点 (a,b) を f の**停留点**という．

(2) $f_x(a,b) = 0,\ f_y(a,b) = 0$ のとき
$H(a,b) > 0,\ f_{xx}(a,b) > 0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$:（狭義の）極小値
$H(a,b) > 0,\ f_{xx}(a,b) < 0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$:（狭義の）極大値
$H(a,b) < 0$　$\Longrightarrow$　$f(a,b)$: 極値でない
ただし $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とする（H を f の **Hessian**（ヘッシアン）という）．

※ $H(a,b) > 0$ とき，$f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) = H(a,b) + f_{xy}(a,b)^2 > 0$ であるから，$f_{xx}(a,b)$ の代わりに $f_{yy}(a,b)$ の符号を調べてもよい．

【問題 6.1】
次の関数の極値を求めよ．

(1) $f(x,y) = x^3 + x^2y - xy - y^2$

(2) $f(x,y) = 3xy^2 + y^3 - 6x^2 - 24x$

(3) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 - y + 2y^3$

(4) $f(x,y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2$

(5) $f(x,y) = x^2 - x^2y + 2y^2 - y^3$

(6) $f(x,y) = xy(1 - x - y)$

(7) $f(x,y) = xy(1 - x - y^2)$

(8) $f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$

(9) $f(x,y) = xy(1 - x - y^4)$

(10) $f(x,y) = x^3y - 2x^2y - 4xy - y^3 - y^2$

(11) $f(x,y) = x^3 - x^2 - x + 2xy^2 - xy^3$

(12) $f(x,y) = \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{5}{3}y^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}y^2 + 2xy$

(13) $f(x,y) = x^3 + y^3 + \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}y^2 + 6xy$

(14) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + xy$

(15) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 + xy$

(16) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - xy$

(17) $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - x^2y^2$

(18) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 5x^2 - 5y^2 + 6xy$

【問題 6.2】
次の関数は $H(0,0) = 0$ を満たす．点 $(0,0)$ で極値をとるか調べよ．

(1) $f(x,y) = x^5 - x^2y + y^2$

(2) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y - y^4$

(3) $f(x,y) = 2x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 3y^3 - 3x^2$

(4) $f(x,y) = x^3 + y^3 - \dfrac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$

(5) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2y^2$

(6) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

(7) $f(x,y) = (x - y^2)^2 - y^5$

★陰関数定理
$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合，$g : O$ で C^1 級，$(a,b) \in O$ とする．
(1) $g(a,b) = 0,\ g_y(a,b) \neq 0$ ならば，点 (a,b) のある開近傍 U 内では $g(x,y) = 0$ における y は x の C^1 級関数 $y = \varphi(x)$ となり，U 内で

$$g(x,\varphi(x)) = 0, \quad \varphi'(x) = -\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))} \ \cdots (*)$$

を満たす．

(2) $g(a,b) = 0,\ g_x(a,b) \neq 0$ ならば，点 (a,b) のある開近傍 V 内では $g(x,y) = 0$ における x は y の C^1 級関数 $x = \psi(y)$ となり，V 内で

$$g(\psi(y),y) = 0, \quad \psi'(y) = -\frac{g_y(\psi(y),y)}{g_x(\psi(y),y)}$$

を満たす．

※図形的には，曲面 $z = g(x,y)$ の xy 平面による切り口は点 (a,b) の近くではある関数のグラフになるということである．また，(1) において φ の微分可能性を認めれば，$g(x,\varphi(x)) = 0$ の両辺を x で微分して

$$g_x(x,\varphi(x)) \cdot 1 + g_y(x,\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = 0$$

これより $(*)$ を得ることもできる．

★条件付き極値
次の問題は講義（月曜日）で扱う．

【問題 6.3】
次の問いに答えよ．

(1) $x^3 + y^3 - xy = 1$ に制限した $f(x,y) = \dfrac{5}{3}x^3 + \dfrac{5}{3}y^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}y^2 + 2xy$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

(2) $x^3 + y^3 = 2$ に制限した $f(x,y) = x^4 + y^4 - 5x^2 - 5y^2 + 6xy$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

(3) $x^2y + xy^2 = 2$ に制限した $f(x,y) = x^3 + y^3 + \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}y^2 + 6xy$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

(4) $x^3 + y^3 = 2$ に制限した $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + xy + y^2$ が点 $(1,1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

(5) $x^3 + y^3 = -2$ に制限した $f(x,y) = x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 + xy$ が点 $(-1,-1)$ で極値をとるかどうか調べよ．

§7.　2 変数関数の重積分

★重積分の累次積分への変更

(1) g_1, g_2：$[a,b]$ で連続，$a \leqq x \leqq b$ で $g_1(x) \leqq g_2(x)$
D：$a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)$
f：D で連続

$$\Longrightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx$$

(2) h_1, h_2：$[c,d]$ で連続，$c \leqq y \leqq d$ で $h_1(y) \leqq h_2(y)$
D：$c \leqq y \leqq d,\ h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)$
f：D で連続

$$\Longrightarrow \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy$$

(3) 上の (1),(2) において，重積分は同じだから

$$\int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right\} dx = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right\} dy \qquad \text{（積分の順序変更）}$$

【問題 7.1】
次の累次積分を求めよ．

(1) $\displaystyle \int_{-1}^2 \left(\int_x^{x+1} y^2 dy \right) dx$

(2) $\displaystyle \int_0^1 \left\{ \int_{x^2+1}^{x+1} (x^2+2y) dy \right\} dx$

(3) $\displaystyle \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{1-2x} (x^2+2y^2) dy \right\} dx$

(4) $\displaystyle \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} xy dy \right) dx$

(5) $\displaystyle \int_1^3 \left\{ \int_1^x \frac{1}{(x+y)^2} dy \right\} dx$

(6) $\displaystyle \int_0^1 \left\{ \int_0^{x^2} \frac{x^2+1}{(y+1)^3} dy \right\} dx$

(7) $\displaystyle \int_1^2 \left(\int_{e^x}^{e^2} \frac{1}{xy} dy \right) dx$

(8) $\displaystyle \int_2^5 \left(\int_3^{x^2} \frac{x}{y^2} dy \right) dx$

(9) $\displaystyle \int_1^e \left(\int_1^{x^2} \frac{x}{y^2} dy \right) dx$

(10) $\displaystyle \int_1^2 \left(\int_2^{2x} \frac{x}{y} dy \right) dx$

(11) $\displaystyle \int_3^5 \left(\int_2^x \frac{x}{y} dy \right) dx$

(12) $\displaystyle \int_1^5 \left(\int_1^x \log \frac{y}{x} dy \right) dx$

(13) $\displaystyle \int_1^2 \left(\int_1^x \log \frac{x}{y} dy \right) dx$

(14) $\displaystyle \int_1^2 \left(\int_1^x \log \frac{x}{y^2} dy \right) dx$

(15) $\displaystyle \int_1^2 \left(\int_x^2 \log \frac{x}{y^2} dy \right) dx$

(16) $\displaystyle \int_1^2 \left(\int_1^x \frac{x^2}{1+xy} dy \right) dx$

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{4}{3}}\left(\int_{\frac{x}{2}}^{2-x}\sqrt{2y-x}\,dy\right)dx$

(18) $\displaystyle\int_0^{\pi}\left(\int_0^{\sin x}x^2y\,dy\right)dx$

(19) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}}(x+y)dy\right\}dx$

(20) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_x^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+y^2}dy\right)dx$

(21) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_{-x^2}^{x}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx$

(22) $\displaystyle\int_4^{4\sqrt{3}}\left(\int_x^{\frac{x^2}{4}}\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)dx$

(23) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_{-x}^{\sqrt{3}x^2}\frac{3x}{3x^2+y^2}dy\right)dx$

(24) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(\int_x^{x^2}\frac{2x^2}{x^2+y^2}dy\right)dx$

【問題 7.2】

次の累次積分の順序を変更せよ．ただし，f は連続とする．

(1) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_{x^2}^{x}f(x,y)dy\right\}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^2\left\{\int_{x-1}^{1}f(x,y)dy\right\}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1\left\{\int_0^{1-x}f(x,y)dy\right\}dx$

(4) $\displaystyle\int_1^3\left\{\int_1^{2x-1}f(x,y)dy\right\}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_x^{2-x}f(x,y)dy\right\}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_{1-x}^{x+1}f(x,y)dy\right\}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1\left\{\int_{x^2-1}^{x}f(x,y)dy\right\}dx$

(8) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_{\sin x}^{e^x}f(x,y)dy\right\}dx$

【問題 7.3】

順序を変更することにより次の累次積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{2\sqrt{x}}^{2}\sqrt{y^3+1}\,dy\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^4\left(\int_{\sqrt{x}}^{2}\sqrt{y^3+1}\,dy\right)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^4\left(\int_{\sqrt{x}}^{2}\frac{1}{\sqrt{y^3+1}}dy\right)dx$

(4) $\displaystyle\int_0^4\left\{\int_{\sqrt{x}}^{2}(y^3+1)^{-\frac{5}{2}}dy\right\}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{x^2}^{1}xe^{y^2}dy\right)dx$

(6) $\displaystyle\int_0^2\left(\int_{\frac{x}{2}}^{1}e^{-y^2}dy\right)dx$

(7) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_1^{\frac{2}{x}}y^2e^{xy}dy\right)dx$

(8) $\displaystyle\int_1^2\left(\int_{\frac{1}{x}}^{1}y^2e^{xy}dy\right)dx$

★変数変換の公式

極座標変換

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} r \geqq 0 \\ \theta : 1\ \text{周分} \end{pmatrix}$$

により，(r,θ) 平面の有界閉領域 D' が (x,y) 平面の有界閉領域 D へうつされるとき，D で連続な関数 f に対して

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot \boldsymbol{r}drd\theta$$

が成り立つ．

※次の公式は用いてよい．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (n=0) \\ 1 & (n=1) \\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n=2,4,6,\dots) \\ \dfrac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3}\cdot 1 & (n=3,5,7,\dots) \end{cases}$$

証明

$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ とおくと，$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$，$I_1 = 1$ はすぐわかる．また，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos x dx \\ &= \Big[\cos^{n-1} x \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x dx \\ &= (0\cdot 1 - 1\cdot 0) + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx \\ &= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx\right) \\ &= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \cos^{n-1} x & & \sin x \\ (n-1)\cos^{n-2} x\cdot(-\sin x) & & \cos x \end{array}$$

だから，漸化式 $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n \geqq 2)$ が得られる．よって，$n = 2,4,6,\dots$ のとき

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}I_0 = \cdots = \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 1}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

また，$n = 3,5,7,\dots$ のとき

$$I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2} = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}I_1 = \cdots = \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdot\cdots\cdot 2}{n\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3}\cdot 1$$

さらに，$x = \dfrac{\pi}{2} - t$ と置換すれば

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = I_n$$

もわかる． ∎

【問題 7.4】

極座標変換により，次の重積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)dxdy \quad (D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy \quad (D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ 0 \leqq y \leqq x)$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{y^2}{x^2}dxdy \quad \left(D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ -\frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right)$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{y^4}{x^2}dxdy \quad \left(D: 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqq y \leqq \sqrt{3}x\right)$

(5) $\displaystyle\iint_D xydxdy \quad (D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

(6) $\displaystyle\iint_D x^2ydxdy \quad (D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

(7) $\displaystyle\iint_D x^3ydxdy \quad (D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

(8) $\displaystyle\iint_D y^2dxdy \quad (D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

(9) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}dxdy \quad (D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

(10) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy \quad (D: x^2+y^2 \leqq 2x,\ y \geqq 0)$

(11) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(12) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(13) $\displaystyle\iint_D y^2dxdy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(14) $\displaystyle\iint_D x^2dxdy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(15) $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$

(16) $\displaystyle\iint_D (2x+y)dxdy \quad (D: x \leqq x^2+y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0)$