科目名	微積分学	対象	1OB-A	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 26 年 6 月 16 日 (月) 2 回目 (〜 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名	
試験 時間	90 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ $A = \left\{ \dfrac{4n+13}{n+3} + (-1)^n \cdot \dfrac{n+5}{n+4} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ に対して $\sup A$ と $\inf A$ を求めよ.

$\boxed{2}$ 次の値を求めよ.

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(n+2)^{3n}}}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\log(1+x+x^2)} - e^x}{x}$

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ.

(1) $\arctan \sqrt{\dfrac{10x+3}{7x-5}}$ を微分せよ.

(2) $\arcsin \dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ を微分せよ．

(3) $f(x) = \dfrac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき，
$(1+x^2)^2 f''(x) + x(1+x^2)f'(x) + 2f(x)$ を簡単にせよ．

$\boxed{4}$ 区間 $[1, \infty)$ で正の値をとる単調減少な連続関数 f に対して

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ．

(2) $f(x) = \dfrac{2}{2x+1}$ $(x \geqq 1)$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ．

科目名	微積分学	対象	1OB-A	学部研究科	理学部第一部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 26 年 6 月 16 日 (月) 2 回目 (〜 時限目)		担当	石川　学	学年		氏名				
試験時間	90 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ $A = \left\{ \dfrac{4n+13}{n+3} + (-1)^n \cdot \dfrac{n+5}{n+4} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ に対して $\sup A$ と $\inf A$ を求めよ.

$a_m = \dfrac{4m+13}{m+3} + (-1)^m \cdot \dfrac{m+5}{m+4}$ $(m \in \mathbb{N})$ とおき, $m \in \mathbb{N}$ とする.

(i) $a_{2m-1} = \dfrac{8m+9}{2m+2} - \dfrac{2m+4}{2m+3} = 3 + \dfrac{1}{(2m+2)(2m+3)}$

だから $3 < a_{2m-1} \leqq \dfrac{61}{20}$ (等号: $m=1$)

(ii) $a_{2m} = \dfrac{8m+13}{2m+3} + \dfrac{2m+5}{2m+4} = 5 + \dfrac{1}{2m+3} + \dfrac{1}{2m+4}$

だから $5 < a_{2m} \leqq \dfrac{161}{30}$ (等号: $m=1$)

以上 (i), (ii) より

$$3 < a_m \leqq \frac{161}{30} \quad (\text{等号}: m=2)$$

・$\max A = \dfrac{161}{30}$ だから $\sup A = \dfrac{161}{30}$

・3 は A の下界で, $\displaystyle\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = \lim_{m\to\infty}\left\{3 + \frac{1}{(2m+2)(2m+3)}\right\} = 3$

だから $\inf A = 3$

$\boxed{2}$ 次の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!(2n)!}{(n+2)^{3n}}}$

$a_m = \dfrac{m!(2m)!}{(m+2)^{3m}}$ $(m \in \mathbb{N})$ とおくと, $a_m > 0$ で

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_{m+1}}{a_m} = \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)!(2m+2)!}{(m+3)^{3m+3}} \cdot \frac{(m+2)^{3m}}{m!(2m)!}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{(m+1)(2m+1)(2m+2)(m+3)^3}{(m+2)^6} \left(\frac{m+2}{m+3}\right)^{3m+6}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{m})(2+\frac{1}{m})(2+\frac{2}{m})(1+\frac{3}{m})^3}{(1+\frac{2}{m})^6 \left\{(1+\frac{1}{m+2})^{m+2}\right\}^3}$$

$$= \frac{4}{e^3}$$

$$\therefore \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{m!(2m)!}{(m+2)^{3m}}} = \frac{4}{e^3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\log(1+x+x^2)} - e^x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\{1+\log(1+x+x^2)\} - e^{2x}}{x\left\{\sqrt{1+\log(1+x+x^2)} + e^x\right\}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{ \frac{\log(1+x+x^2)}{x+x^2} \cdot (1+x) - \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot 2 \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\log(1+x+x^2)} + e^x}$$

$$= (1\cdot 1 - 1 \cdot 2) \cdot \frac{1}{1+1}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ.

(1) $\arctan \sqrt{\dfrac{10x+3}{7x-5}}$ を微分せよ.

$$\left(\arctan\sqrt{\frac{10x+3}{7x-5}}\right)' = \frac{1}{1+\frac{10x+3}{7x-5}} \cdot \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\frac{10x+3}{7x-5}}} \cdot \frac{10\cdot(7x-5) - (10x+3)\cdot 7}{(7x-5)^2} \right\}$$

$$= \frac{7x-5}{17x-2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7x-5}{10x+3}} \cdot \frac{-71}{(7x-5)^2}$$

$$= \frac{-71}{2(17x-2)(7x-5)} \sqrt{\frac{7x-5}{10x+3}}$$

(2) $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+1}}$ を微分せよ.

$$\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4x^2+1}}}\cdot\left(-\frac{\frac{8x}{2\sqrt{4x^2+1}}}{4x^2+1}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{4x^2+1}{4x^2}}\cdot\frac{-4x}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2|x|}\cdot\frac{-4x}{(4x^2+1)\sqrt{4x^2+1}}$$

$$= \frac{-2x}{|x|(4x^2+1)}$$

(3) $f(x)=\dfrac{x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき,
$(1+x^2)^2f''(x)+x(1+x^2)f'(x)+2f(x)$ を簡単にせよ.

$$f'(x) = \frac{\left(1\cdot\arctan x + x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\sqrt{1+x^2} - x\arctan x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)\arctan x + x - x^2\arctan x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\arctan x + x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

両辺に $\sqrt{1+x^2}$ をかけて

$$\sqrt{1+x^2}\,f'(x) = \frac{\arctan x + x}{1+x^2}$$

両辺を微分して

$$\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot f'(x) + \sqrt{1+x^2}\cdot f''(x) = \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}+1\right)\cdot(1+x^2) - (\arctan x + x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{xf'(x)}{\sqrt{1+x^2}} + \sqrt{1+x^2}\,f''(x) = \frac{2-x^2-2x\arctan x}{(1+x^2)^2}$$

両辺に $(1+x^2)\sqrt{1+x^2}$ をかけて

$$x(1+x^2)f'(x) + (1+x^2)^2f''(x) = \frac{2-x^2-2x\arctan x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$x(1+x^2)f'(x) + (1+x^2)^2f''(x) = \frac{2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} - 2f(x)$$

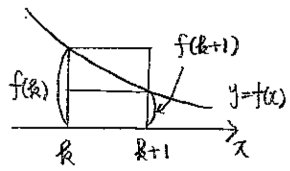
$$\therefore\ (1+x^2)^2f''(x) + x(1+x^2)f'(x) + 2f(x) = \frac{2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\boxed{4}$ 区間 $[1,\infty)$ で正の値をとる単調減少な連続関数 f に対して

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx \quad (n\in\mathbb{N})$$

とおく. 次の問いに答えよ.

(1) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示せ.



グラフより, $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$f(k+1) < \int_k^{k+1} f(x)dx < f(k)$$

が成り立つ. よって, $m\in\mathbb{N}$ に対して

$$a_m - a_{m+1} = \left\{\sum_{k=1}^{m} f(k) - \int_1^m f(x)dx\right\} - \left\{\sum_{k=1}^{m+1} f(k) - \int_1^{m+1} f(x)dx\right\}$$

$$= \int_m^{m+1} f(x)dx - f(m+1) > 0 \qquad \therefore\ a_{m+1} < a_m$$

また, $m \geqq 2$ のとき

$$a_m = \sum_{k=1}^{m} f(k) - \int_1^m f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(k) - \sum_{k=1}^{m-1}\int_k^{k+1} f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\left\{f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx\right\} + f(m) > 0$$

以上より, $\{a_m\}$ は単調減少で下に有界であるから,
単調数列の収束定理より, $\{a_m\}$ は収束する.

(2) $f(x)=\dfrac{2}{2x+1}$ $(x\geqq 1)$ のとき, 数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ.

$$a_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{2}{2k+1} - \int_1^m \frac{2}{2x+1}dx$$

$$= \sum_{k=1}^{2m+1}\frac{2}{k} - \sum_{k=1}^{m}\frac{2}{2k} - 2 - \Big[\log|2x+1|\Big]_1^m$$

$$= 2\left\{\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{k} - \log(2m+1) + \log(2m+1)\right\}$$

$$- \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \log m + \log m\right) - 2 - \{\log(2m+1) - \log 3\}$$

$$= 2\left\{\sum_{k=1}^{2m+1}\frac{1}{k} - \log(2m+1)\right\} - \left(\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \log m\right)$$

$$+ \log\left(2+\frac{1}{m}\right) + \log 3 - 2$$

であるから

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 2\gamma - \gamma + \log 2 + \log 3 - 2$$

$$= \gamma + \log 6 - 2$$