

科目名	微積分学	対象	1OB-AB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 8 月 4 日 (月) 2 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							

平成 26 年度前期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

1 次を求めよ.

(1) $\int_{-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \arctan x dx$

(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-3x^2) \arcsin x dx$

(3) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x$

2 (1) 次の関数の Maclaurin 展開を 4 次以下の項まで求めよ. 必要ならば, 下の Maclaurin 展開を用いてよい. ただし, 係数は既約分数にすること.

(i) $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+2x}}$

(ii) $\sqrt{1+x+x^2+x^3}$

(2) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+2x}} - e^{-x} \sin x \right)$ を求めよ. 答のみでよい.

★代表的な関数の Maclaurin 展開

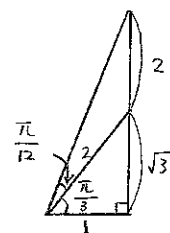
$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots \quad (-1 < x \leq 1)$$
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

科目名		担当	先生
学籍番号	学部	学科	番
所属			H26 前・定

1 (1) $\int_{-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}} \arctan x dx = \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_{-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}$

$$= (2+\sqrt{3}) \cdot \frac{5}{12} \pi - (-\sqrt{3}) \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \{ \log(8+4\sqrt{3}) - \log 4 \}$$

$$= \left(\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{12} \right) \pi - \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})$$



(2) $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-3x^2) \arcsin x dx = \left[x(1-x^2) \arcsin x \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x \sqrt{1-x^2} dx$

$$= \left(\frac{3}{8} \cdot \frac{\pi}{6} - 0 \cdot 0 \right) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) dx$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - 1 \right)$$

$$= \frac{\pi}{16} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{3}$$

Diagram for problem 2 showing the substitution for the integral of x*sqrt(1-x^2). It shows arcsin x and 1-x^2 = x(1-x^2) with arrows indicating the relationship between the terms and the derivative of the inner function.

(3) $\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{(x^2+1) - x^2}{(x^2+1)^2} dx$

$$= \int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \arctan x - \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} dx \right)$$

$$= \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \arctan x$$

$$= \frac{1}{2} \arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)}$$

Diagram for problem 3 showing the partial fraction decomposition of 1/(x^2+1)^2. It shows x and 1 in the denominator, and the corresponding terms in the numerator: -x/(x^2+1) and 1/(x^2+1)^2.

(4) $x > 0$ のとき

$$\left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = e^{\log \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x} = e^{x \log \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)}$$

である。こゝで

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)}{\frac{1}{x}} \ominus \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\frac{2}{\pi} \arctan x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\left(\frac{1}{x^2} + 1 \right) \arctan x} = -\frac{2}{\pi}$$

よって、指数関数の連続性より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \log \left(\frac{2}{\pi} \arctan x \right)} = e^{-\frac{2}{\pi}}$$

$$\boxed{2} \quad (1) \quad (i) \quad \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+2x}} = \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

$$= \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots \right) \left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{35}{8}x^4 - \dots \right)$$

$$= x - x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{5}{2}x^4 + \dots$$

$$+ \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \dots$$

$$+ \dots$$

$$= x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^4 + \dots$$

$$(ii) \quad \sqrt{1+x+x^2+x^3} = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2+x^3) - \frac{1}{8}(x+x^2+x^3)^2 + \frac{1}{16}(x+x^2+x^3)^3 - \frac{5}{128}(x+x^2+x^3)^4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x+x^2+x^3) - \frac{1}{8}(x^2+x^4+2x^3+2x^4+\dots) + \frac{1}{16}(x^3+3x^4+\dots) - \frac{5}{128}(x^4+\dots) + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{29}{128}x^4 + \dots$$

$$(2) \quad e^{-x} \sin x = \left(1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right) \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots \right)$$

$$= x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \dots$$

$$- \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \dots$$

$$+ \dots$$

$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$$

Thus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+2x}} - e^{-x} \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left\{ \left(x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) \right) - \left(x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \right) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left(\frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right)$$

$$= \frac{4}{3}$$