科目名	微積分学B 微積分学	対象	10B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 11 月 30 日 (月)　回目 (　〜　時限目)				担当	石川　学	学年		氏名		
試験 時間	90 分	注意 事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ (　　)							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ $\dfrac{20x^2+44x+42}{(x+1)(x-2)(x^2+3x+4)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+3x+4}$

が常に成り立つとき

$A = \boxed{}$, $B = \boxed{}$, $C = \boxed{}$, $D = \boxed{}$

である．空欄を埋めて，次の積分を求めよ．

$$\int \frac{20x^2+44x+42}{(x+1)(x-2)(x^2+3x+4)}dx$$

点

$\boxed{2}$ $\tan\dfrac{x}{2} = t$ と置換して，次を求めよ．

$$\int \frac{\cos x + 1}{(\sin x + 1)(2\sin x - 3\cos x + 3)}dx$$

点

$\boxed{3}$ 次の広義積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$

点

(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^4}dx$

点

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{-7x^2+13}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}dx$

点

$\boxed{4}$ $f(x,y) = xy - 2x^2y - 3xy^2 - 12x^2y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f(x,y)$: C^2 級で，$f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0$, $f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$: 極小値
$H(a,b)>0$, $f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$: 極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$: 極値でない
ただし $H(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-f_{xy}(x,y)^2$ とする．

※物理数学の $D(x,y)=f_{xy}(x,y)^2-f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$ を用いてもよい．

点

科目名	微積分学B 微積分学	対象	1OB	学部研究科	理学部第一部	学科専攻科		学籍番号	
平成27年11月30日(月) 回目 (～ 時限目)		担当	石川 学	学年		氏名			
試験時間	90分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★空欄補充以外の解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

1 $\dfrac{20x^2+44x+42}{(x+1)(x-2)(x^2+3x+4)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+3x+4}$

が常に成り立つとき

$A = \boxed{-3}$, $B = \boxed{5}$, $C = \boxed{-2}$, $D = \boxed{1}$

である．空欄を埋めて，次の積分を求めよ.

$$\int \frac{20x^2+44x+42}{(x+1)(x-2)(x^2+3x+4)}dx$$

$$= \int \left(-\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} + \frac{-2x+1}{x^2+3x+4}\right) dx$$

$$= \int \left\{-\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} + \frac{-(2x+3)+4}{x^2+3x+4}\right\} dx$$

$$= \int \left\{-\frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2} - \frac{2x+3}{x^2+3x+4} + \frac{4}{\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}\right\} dx$$

$$= -3\log|x+1| + 5\log|x-2| - \log(x^2+3x+4) + \frac{4}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \arctan \frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

$$= -3\log|x+1| + 5\log|x-2| - \log(x^2+3x+4) + \frac{8}{\sqrt{7}} \arctan \frac{2x+3}{\sqrt{7}}$$

点

2 $\tan\dfrac{x}{2} = t$ と置換して，次を求めよ.

$$\int \frac{\cos x + 1}{(\sin x + 1)(2\sin x - 3\cos x + 3)}dx$$

$$= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}+1}{\left(\frac{2t}{1+t^2}+1\right)\left(2\cdot\frac{2t}{1+t^2} - 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+3\right)} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$= \int \frac{2}{t(3t+2)(t+1)^2}dt$$

$$= \int \left\{\frac{1}{t} - \frac{27}{3t+2} + \frac{8}{t+1} + \frac{2}{(t+1)^2}\right\} dt$$

$$= \log|t| - 9\log|3t+2| + 8\log|t+1| - \frac{2}{t+1}$$

点

3 次の広義積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx$

$$\int_\varepsilon^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx = \Big[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2\Big]_\varepsilon^{\sqrt{e}}$$

$$= \left\{\sqrt{e}\cdot\frac{1}{4} - \varepsilon(\log\varepsilon)^2\right\} - 2\left(\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2} - \varepsilon\log\varepsilon\right) + 2(\sqrt{e}-\varepsilon)$$

であるから

$$\int_0^{\sqrt{e}} (\log x)^2 dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left\{\frac{5\sqrt{e}}{4} - (\sqrt{\varepsilon}\log\varepsilon)^2 + 2\varepsilon\log\varepsilon - 2\varepsilon\right\}$$

$$= \frac{5\sqrt{e}}{4}$$

※ $\lim_{x\to+0} x^\alpha \log x = 0$ $(\alpha>0)$ を用いた.

点

(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^4}dx$

$$\int_{\sqrt{3}}^{R} \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^4}dx = \int_{\sqrt{3}}^{R} (\arctan x)^{-4}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \left[\frac{1}{-3}(\arctan x)^{-3}\right]_{\sqrt{3}}^{R}$$

$$= -\frac{1}{3}\left\{(\arctan R)^{-3} - \left(\frac{\pi}{3}\right)^{-3}\right\}$$

であるから

$$\int_{\sqrt{3}}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^4}dx = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\frac{27}{\pi^3} - (\arctan R)^{-3}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{27}{\pi^3} - \frac{8}{\pi^3}\right)$$

$$= \frac{19}{3\pi^3}$$

点

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{-7x^2+13}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}dx$

$$\int \frac{-7x^2+13}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}dx$$

$$= \int \left(\frac{2x+4}{x^2+1} + \frac{-2x-7}{x^2-2x+5} \right) dx$$

$$= \int \left\{ \frac{2x+4}{x^2+1} + \frac{-(2x-2)-9}{x^2-2x+5} \right\} dx$$

$$= \int \left\{ \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4}{1+x^2} - \frac{2x-2}{x^2-2x+5} - \frac{9}{2^2+(x-1)^2} \right\} dx$$

$$= \log(x^2+1) + 4\arctan x - \log(x^2-2x+5) - \frac{9}{2}\arctan\frac{x-1}{2}$$

であるから

$$\int_{-1}^{R} \frac{-7x^2+13}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}dx$$

$$= \left[\log\frac{x^2+1}{x^2-2x+5} + 4\arctan x - \frac{9}{2}\arctan\frac{x-1}{2} \right]_{-1}^{R}$$

$$= \left(\log\frac{R^2+1}{R^2-2R+5} - \log\frac{1}{4} \right) + 4\left\{\arctan R - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\} - \frac{9}{2}\left\{\arctan\frac{R-1}{2} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

よって

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{-7x^2+13}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}dx$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left\{ \log\frac{1+\frac{1}{R^2}}{1-\frac{2}{R}+\frac{5}{R^2}} + \log 4 + 4\left(\arctan R + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{9}{2}\left(\arctan\frac{R-1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\}$$

$$= 0 + \log 4 + 4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 2\log 2 - \frac{3}{8}\pi$$

点

$\boxed{4}$ $f(x,y) = xy - 2x^2y - 3xy^2 - 12x^2y^2$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x,y)$ の停留点を求めよ．

(2) $f(x,y)$ の極値を求めよ．

※ $f(x,y)$: C^2 級で，$f_x(a,b)=0$, $f_y(a,b)=0$ のとき
$H(a,b)>0$, $f_{xx}(a,b)>0 \implies f(a,b)$: 極小値
$H(a,b)>0$, $f_{xx}(a,b)<0 \implies f(a,b)$: 極大値
$H(a,b)<0 \implies f(a,b)$: 極値でない
ただし $H(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2$ とする．

※物理数学の $D(x,y) = f_{xy}(x,y)^2 - f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)$ を用いてもよい．

(1) $\begin{cases} f_x(x,y) = y - 4xy - 3y^2 - 24xy^2 = 0 & \cdots ① \\ f_y(x,y) = x - 2x^2 - 6xy - 24x^2y = 0 & \cdots ② \end{cases}$

① より $y(1-4x-3y-24xy)=0$

$\therefore y=0 \lor 1-4x-3y-24xy=0 \cdots ③$

(i) $y=0$ のとき，② より $x-2x^2=0$

$x(1-2x)=0$

$\therefore x=0, \frac{1}{2}$

(ii) ③ のとき，② より

$x(1-2x-6y-24xy)=0$

$x\{1-2x-6y-(1-4x-3y)\}=0$

$x(2x-3y)=0$

$\therefore x=0 \lor 2x=3y \cdots ④$

$x=0$ のとき，③ より $1-3y=0$ $\therefore y=\frac{1}{3}$

④ のとき，③ より $1-4x-2x-16x^2=0$

$16x^2+6x-1=0$

$(2x+1)(8x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$

このとき，④ より それぞれ $y=-\frac{1}{3}, \frac{1}{12}$

以上より，停留点は

$(0,0), (\frac{1}{2},0), (0,\frac{1}{3}), (-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}), (\frac{1}{8},\frac{1}{12})$

(2) $f_{xx}(x,y) = -4y-24y^2$, $f_{yy}(x,y) = -6x-24x^2$, $f_{xy}(x,y) = 1-4x-6y-48xy$

$H(x,y) = (-4y-24y^2)(-6x-24x^2) - (1-4x-6y-48xy)^2$

- $H(0,0) = 0\cdot 0 - 1^2 = -1 < 0$ $\therefore f(0,0)$: 極値でない
- $H(\frac{1}{2},0) = 0\cdot(-9) - (-1)^2 = -1 < 0$ $\therefore f(\frac{1}{2},0)$: 極値でない．
- $H(0,\frac{1}{3}) = (-4)\cdot 0 - (-1)^2 = -1 < 0$ $\therefore f(0,\frac{1}{3})$: 極値でない．
- $H(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}) = (-\frac{4}{3})\cdot(-3) - (-3)^2 = -5 < 0$

  $\therefore f(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$: 極値でない
- $H(\frac{1}{8},\frac{1}{12}) = (-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{9}{8}) - (-\frac{1}{2})^2 = \frac{5}{16} > 0$, $f_{xx}(\frac{1}{8},\frac{1}{12}) = -\frac{1}{2} < 0$

  $\therefore f(\frac{1}{8},\frac{1}{12}) = \frac{1}{256}$: 極大値

点