

科目名	微積分学 B 微積分学	対 象	1OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 28 年 11 月 28 日 (月) 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記のみ参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません.

① $f(x, y) = 2x^3 + \frac{1}{2}xy^2 - 9x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 3xy + 12x + 3y$

について、次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ. 答のみでよい.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

② $\frac{9}{4}x^4 + y^3 - 18x^2 - 4y^2 + y + 6 = 0$ で定まる陰関数の極値を求めよ.

点

点

3 $\Gamma : x^4 + y^4 + 2x^2 + 2y^2 + 6xy = 12$ に制限した xy の最大値, 最小値とそのときの (x, y) を求めよ. 必要ならば, Γ が有界閉集合であることは用いてよい.

4 $\Gamma : x^3y^2 + x^2y^3 - xy = 1$ に制限した
$$f(x, y) = x^3 + y^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 - 2xy$$
が点 $(1, 1)$ で極値をとるかどうか調べよ.

1. 開集合で定義された関数の極値

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合, f を O で C^2 級, $(a, b) \in O$ とする.

(1) $f(a, b)$ が (広義の) 極値 $\implies f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$

※ $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ を満たす点 (a, b) を f の停留点という.

(2) $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$ のとき

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \implies f(a, b) : (\text{狭義の}) \text{ 極小値}$

$H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \implies f(a, b) : (\text{狭義の}) \text{ 極大値}$

$H(a, b) < 0 \implies f(a, b) : \text{極値でない}$

ただし $H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とする (H を f の **Hessian** という).

2. 陰関数の極値

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合, f を O で C^2 級, $(a, b) \in O$ とし, $f(a, b) = 0, f_y(a, b) \neq 0$ をみたすとする. このとき, (a, b) の近傍で $f(x, y) = 0$ が定める陰関数を $y = \varphi(x)$ とすると, 次が成り立つ.

(1) $\varphi(a)(= b)$ が (広義の) 極値 $\implies f_x(a, b) = 0$

(2) $f_x(a, b) = 0$ のとき

・ $\frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)} > 0 \implies \varphi(a)(= b)$ は (狭義の) 極大値

・ $\frac{f_{xx}(a, b)}{f_y(a, b)} < 0 \implies \varphi(a)(= b)$ は (狭義の) 極小値

3. Lagrange の未定乗数法

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合, f, g を O で C^1 級,

$$\Gamma = \{(x, y) \in O \mid g(x, y) = 0\}$$

とする. $(a, b) \in \Gamma$ が

$$g_x(a, b) \neq 0 \quad \text{または} \quad g_y(a, b) \neq 0$$

をみたし, Γ に制限した f (これを $f|_{\Gamma}$ とかく) が (a, b) で極値をとるならば

$$\begin{cases} f_x(a, b) - \lambda g_x(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) - \lambda g_y(a, b) = 0 \end{cases}$$

をみたす $\lambda \in \mathbb{R}$ が存在する.

※ $g_x(a, b) = 0$ かつ $g_y(a, b) = 0$ をみたす $(a, b) \in \Gamma$ を, Γ の特異点という. よって, $f|_{\Gamma}$ が極値をとる点の候補は, 「 Γ の特異点」と「Lagrange の未定乗数法で求められる点」である.

4. 条件付き極値の判定法

$O \subset \mathbb{R}^2$ を開集合, f, g を O で C^2 級,

$$\Gamma = \{(x, y) \in O \mid g(x, y) = 0\}$$

とする. $(a, b) \in \Gamma$ が

$$g_x(a, b) \neq 0 \quad \text{または} \quad g_y(a, b) \neq 0$$

をみたし, ある $\lambda \in \mathbb{R}$ で

$$\begin{cases} f_x(a, b) - \lambda g_x(a, b) = 0 \\ f_y(a, b) - \lambda g_y(a, b) = 0 \end{cases}$$

が成り立っているとする. このとき

$$D(a, b) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & f_{xx}(a, b) - \lambda g_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) - \lambda g_{xy}(a, b) \\ g_y(a, b) & f_{xy}(a, b) - \lambda g_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) - \lambda g_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

とおくと

(1) $D(a, b) > 0 \implies f(a, b)$ は $f|_{\Gamma}$ の極大値

(2) $D(a, b) < 0 \implies f(a, b)$ は $f|_{\Gamma}$ の極小値

$$\boxed{1} \quad f(x, y) = 2x^3 + \frac{1}{2}xy^2 - 9x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 3xy + 12x + 3y$$

について、次の問いに答えよ.

(1) $f(x, y)$ の停留点を求めよ. 答のみでよい.

(2) $f(x, y)$ の極値を求めよ.

解答

$$(1) \quad \begin{cases} f_x(x, y) = 6x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 18x - 3y + 12 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f_y(x, y) = xy - y - 3x + 3 = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

② より

$$y(x - 1) - 3(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(y - 3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad \text{または} \quad y = 3$$

$x = 1$ のとき, ① より

$$6 + \frac{1}{2}y^2 - 18 - 3y + 12 = 0$$

$$\frac{1}{2}y^2 - 3y = 0$$

$$\frac{1}{2}y(y - 6) = 0$$

$$\therefore y = 0, 6$$

$y = 3$ のとき, ① より

$$6x^2 + \frac{9}{2} - 18x - 9 + 12 = 0$$

$$6x^2 - 18x + \frac{15}{2} = 0$$

$$\frac{3}{2}(2x - 1)(2x - 5) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}$$

よって, 停留点は $(1, 0), (1, 6), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

$$(2) \quad f_{xx}(x, y) = 12x - 18, \quad f_{yy}(x, y) = x - 1, \quad f_{xy}(x, y) = y - 3$$

$$H(x, y) = (12x - 18)(x - 1) - (y - 3)^2$$

$$\cdot H(1, 0) = (-6) \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0 \quad \therefore f(1, 0) : \text{極値でない}$$

$$\cdot H(1, 6) = (-6) \cdot 0 - 3^2 = -9 < 0 \quad \therefore f(1, 6) : \text{極値でない}$$

$$\cdot H\left(\frac{1}{2}, 3\right) = (-12) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0^2 = 6 > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{1}{2}, 3\right) = -12 < 0 \quad \therefore f\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{25}{4} : \text{極大値}$$

$$\cdot H\left(\frac{5}{2}, 3\right) = 12 \cdot \frac{3}{2} - 0^2 = 18 > 0, \quad f_{xx}\left(\frac{5}{2}, 3\right) = 12 > 0 \quad \therefore f\left(\frac{5}{2}, 3\right) = -\frac{7}{4} : \text{極小値}$$

$$\boxed{2} \quad \frac{9}{4}x^4 + y^3 - 18x^2 - 4y^2 + y + 6 = 0 \quad \text{で定まる陰関数の極値を求めよ.}$$

解答

$$f(x, y) = \frac{9}{4}x^4 + y^3 - 18x^2 - 4y^2 + y + 6 \quad \text{とおくと}$$

$$f_x(x, y) = 9x^3 - 36x, \quad f_y(x, y) = 3y^2 - 8y + 1, \quad f_{xx}(x, y) = 27x^2 - 36$$

まず, $f(x, y) = 0, \quad f_x(x, y) = 0$ をみたす (x, y) を求める.

$$f_x(x, y) = 0 \quad \text{より} \quad 9x(x^2 - 4) = 0 \quad \therefore x = 0, \pm 2$$

$x = 0$ のとき, $f(x, y) = 0$ へ代入して

$$y^3 - 4y^2 + y + 6 = 0$$

$$(y + 1)(y - 2)(y - 3) = 0$$

$$\therefore y = -1, 2, 3$$

$x = \pm 2$ のとき, $f(x, y) = 0$ へ代入して

$$36 + y^3 - 72 - 4y^2 + y + 6 = 0$$

$$y^3 - 4y^2 + y - 30 = 0$$

$$(y - 5)(y^2 + y + 6) = 0$$

$$\therefore y = 5$$

よって $(x, y) = (0, -1), (0, 2), (0, 3), (\pm 2, 5)$

・ $f_y(0, -1) = 12 \neq 0$ より, $(0, -1)$ の近傍で $f(x, y) = 0$ が定める陰関数が存在する.

$$\frac{f_{xx}(0, -1)}{f_y(0, -1)} = \frac{-36}{12} < 0 \text{ より } x = 0 \text{ のとき } y = -1 \text{ は極小値}$$

・ $f_y(0, 2) = -3 \neq 0$ より, $(0, 2)$ の近傍で $f(x, y) = 0$ が定める陰関数が存在する.

$$\frac{f_{xx}(0, 2)}{f_y(0, 2)} = \frac{-36}{-3} > 0 \text{ より } x = 0 \text{ のとき } y = 2 \text{ は極大値}$$

・ $f_y(0, 3) = 4 \neq 0$ より, $(0, 3)$ の近傍で $f(x, y) = 0$ が定める陰関数が存在する.

$$\frac{f_{xx}(0, 3)}{f_y(0, 3)} = \frac{-36}{4} < 0 \text{ より } x = 0 \text{ のとき } y = 3 \text{ は極小値}$$

・ $f_y(\pm 2, 5) = 36 \neq 0$ より, $(\pm 2, 5)$ の近傍で $f(x, y) = 0$ が定める陰関数が存在する.

$$\frac{f_{xx}(\pm 2, 5)}{f_y(\pm 2, 5)} = \frac{72}{36} > 0 \text{ より } x = \pm 2 \text{ のとき } y = 5 \text{ は極大値}$$

□ 3 $\Gamma : x^4 + y^4 + 2x^2 + 2y^2 + 6xy = 12$ に制限した xy の最大値, 最小値とそのときの (x, y) を求めよ. 必要ならば, Γ が有界閉集合であることは用いてよい.

解答

$f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2 + 2y^2 + 6xy - 12$, $\Gamma : g(x, y) = 0$ とおくと

$$f_x(x, y) = y, f_y(x, y) = x, g_x(x, y) = 4x^3 + 4x + 6y, g_y(x, y) = 4y^3 + 4y + 6x$$

である.

$g_x(x, y) = 0, g_y(x, y) = 0$ を解くと $(x, y) = (0, 0), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (複号同順) で, $(0, 0), \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \notin \Gamma$ (複号同順)

であるから, $f|_{\Gamma}$ が極値をとる点の候補は Lagrange の未定乗数法ですべて求められる.

また, Γ は有界閉集合で, f は連続であるから, Weierstrass の最大値定理より, $f|_{\Gamma}$ は最大値, 最小値をもつ. そして, 最大値, 最小値はそれぞれ極大値, 極小値となるから, 最大値, 最小値をとる点 (x, y) は Lagrange の未定乗数法より

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + 2x^2 + 2y^2 + 6xy = 12 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y - \lambda(4x^3 + 4x + 6y) = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x - \lambda(4y^3 + 4y + 6x) = 0 & \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

の解である.

② と ③ より λ を消去すると

$$y(4y^3 + 4y + 6x) - x(4x^3 + 4x + 6y) = 0$$

$$4y^4 + 4y^2 + 6xy - 4x^4 - 4x^2 - 6xy = 0$$

$$y^4 + y^2 - x^4 - x^2 = 0$$

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2) + (y^2 - x^2) = 0$$

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 + 1) = 0$$

$$\therefore y = \pm x$$

$y = x$ のとき, ① より

$$x^4 + x^4 + 2x^2 + 2x^2 + 6x^2 = 12$$

$$2x^4 + 10x^2 - 12 = 0$$

$$2(x^2 + 6)(x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore x = \pm 1$$

$y = -x$ のとき, ① より

$$x^4 + x^4 + 2x^2 + 2x^2 - 6x^2 = 12$$

$$2x^4 - 2x^2 - 12 = 0$$

$$2(x^2 + 2)(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{3}$$

よって $(x, y) = (\pm 1, \pm 1), (\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3})$ (複号同順)

このとき, 関数値は

$$f(\pm 1, \pm 1) = 1, \quad f(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3}) = -3 \quad (\text{複号同順})$$

で, 異なる値は 2 つだけであるから, 大きい方が最大値, 小さい方が最小値となる. 以上より

$$\text{最大値 } f(\pm 1, \pm 1) = 1, \quad \text{最小値 } f(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3}) = -3 \quad (\text{複号同順})$$

□4 $\Gamma: x^3y^2 + x^2y^3 - xy = 1$ に制限した

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 - 2xy$$

が点 $(1, 1)$ で極値をとるかどうかが調べよ.

解答

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{2}y^2 - 2xy \text{ より}$$

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 7x - 2y, \quad f_y(x, y) = 3y^2 + 7y - 2x$$

$$f_{xx}(x, y) = 6x + 7, \quad f_{yy}(x, y) = 6y + 7, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$

また, $g(x, y) = x^3y^2 + x^2y^3 - xy - 1$ とおくと

$$g_x(x, y) = 3x^2y^2 + 2xy^3 - y, \quad g_y(x, y) = 2x^3y + 3x^2y^2 - x$$

$$g_{xx}(x, y) = 6xy^2 + 2y^3, \quad g_{yy}(x, y) = 2x^3 + 6x^2y, \quad g_{xy}(x, y) = 6x^2y + 6xy^2 - 1$$

$(x, y) = (1, 1)$ のとき

$$f_x = 8, \quad f_y = 8, \quad g_x = 4, \quad g_y = 4$$

より, Lagrange の未定乗数 λ は $\lambda = 2$

さらに

$$f_{xx} - \lambda g_{xx} = 13 - 2 \cdot 8 = -3, \quad f_{yy} - \lambda g_{yy} = 13 - 2 \cdot 8 = -3, \quad f_{xy} - \lambda g_{xy} = -2 - 2 \cdot 11 = -24$$

であるから

$$D(1, 1) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & -3 & -24 \\ 4 & -24 & -3 \end{vmatrix} = -672 < 0$$

$$\therefore f(1, 1) = 7 : \text{極小値}$$