科目名	微積分学 A 微積分学	対象	1OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 28 年 6 月 20 日 (月) 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名	
試験時間	90 分	注意事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします．

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません．

$\boxed{1}$ $A=\left\{\dfrac{2n+1}{n+2}+(-1)^n\cdot\dfrac{10n+1}{2n-1}\ \middle|\ n\in\mathbb{N}\right\}$ に対して $\sup A$ と $\inf A$ を求めよ．

点

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!\,n^{5n}}{(n!)^4\,(3n)!}}$ の値を求めよ．

点

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\arctan\sqrt{\dfrac{11x+13}{17x+19}}$ を微分せよ．

点

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\,e^{\arccos x}$ のとき，$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)$ を簡単にせよ．

点

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{\sin x \cos x - x}$

点

(2) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x\sqrt{1-x}}{x^3}$

点

(3) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \left(\cos\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x\tan x}}$

点

$\boxed{5}$ 次の関数の Maclaurin 展開ををかっこ内の項まで求めよ．ただし，係数は既約分数にすること．必要ならば，次の Maclaurin 展開を用いてよい．

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2x}{3}-x^2}}$ （4 次以下）

点

(2) $\log(1+\arcsin x)$ （5 次以下）

点

科目名	微積分学A 微積分学	対象	10B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成28年 6 月 20 日 (月) 回目 (～ 時限目)		担当	石川 学			学年		氏名		
試験時間	90 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ $A=\left\{\dfrac{2n+1}{n+2}+(-1)^n\cdot\dfrac{10n+1}{2n-1}\;\middle|\; n\in\mathbb{N}\right\}$ に対して $\sup A$ と $\inf A$ を求めよ.

$m, m\in\mathbb{N}$ とし，$a_m=\dfrac{2m+1}{m+2}+(-1)^m\cdot\dfrac{10m+1}{2m-1}$ とおく.

(i) $a_{2m-1}=\dfrac{4m-1}{2m+1}-\dfrac{2m-9}{4m-3}=\dfrac{2(2m+1)-3}{2m+1}-\dfrac{5(4m-3)+6}{4m-3}$

$=2-\dfrac{3}{2m+1}-5-\dfrac{6}{4m-3}=-3-\dfrac{3}{2m+1}-\dfrac{6}{4m-3}$

$\therefore\ -10\leqq a_{2m-1}<-3$ （等号：$m=1$）

(ii) $a_{2m}=\dfrac{4m+1}{2m+2}+\dfrac{20m+1}{4m-1}=\dfrac{2(2m+2)-3}{2m+2}+\dfrac{5(4m-1)+6}{4m-1}$

$=2-\dfrac{3}{2m+2}+5+\dfrac{6}{4m-1}=7+\dfrac{15}{(2m+2)(4m-1)}$

$\therefore\ 7<a_{2m}\leqq\dfrac{33}{4}$ （等号：$m=1$）

以上(i),(ii)より

$-10\leqq a_m\leqq\dfrac{33}{4}$ （左等号：$m=1$，右等号：$m=2$）

・$\max A=\dfrac{33}{4}$ だから $\sup A=\dfrac{33}{4}$

・$\min A=-10$ だから $\inf A=-10$

点

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n)!\,n^{5n}}{(n!)^4\,(3n)!}}$ の値を求めよ.

$a_m=\dfrac{(2m)!\,m^{5m}}{(m!)^4(3m)!}$ $(m\in\mathbb{N})$ とおくと

$\dfrac{a_{m+1}}{a_m}=\dfrac{(2m+2)!\,(m+1)^{5m+5}}{\{(m+1)!\}^4(3m+3)!}\cdot\dfrac{(m!)^4(3m)!}{(2m)!\,m^{5m}}$

$=\dfrac{(2m+1)(2m+2)}{3(3m+1)(3m+2)}\left(\dfrac{m+1}{m}\right)^{5m}$

$=\dfrac{(2+\frac{1}{m})(2+\frac{2}{m})}{3(3+\frac{1}{m})(3+\frac{2}{m})}\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^5$

$\longrightarrow\dfrac{4e^5}{27}$ $(m\to\infty)$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{a_m}=\frac{4e^5}{27}$

点

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ.

(1) $\arctan\sqrt{\dfrac{11x+13}{17x+19}}$ を微分せよ.

$\left(\arctan\sqrt{\dfrac{11x+13}{17x+19}}\right)'=\dfrac{1}{1+\dfrac{11x+13}{17x+19}}\cdot\left\{\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{11x+13}{17x+19}}}\cdot\dfrac{11\cdot(17x+19)-(11x+13)\cdot 17}{(17x+19)^2}\right\}$

$=\dfrac{17x+19}{28x+32}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17x+19}{11x+13}}\cdot\dfrac{-12}{(17x+19)^2}$

$=\dfrac{-3}{2(7x+8)(17x+19)}\sqrt{\dfrac{17x+19}{11x+13}}$

点

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}\,e^{\arccos x}$ のとき，$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)$ を簡単にせよ.

$f'(x)=\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot e^{\arccos x}+\sqrt{1-x^2}\cdot\left\{e^{\arccos x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right\}$

$=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arccos x}-e^{\arccos x}$

$\therefore\ \sqrt{1-x^2}\,f'(x)=-xe^{\arccos x}-f(x)$

両辺微分して

$\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot f'(x)+\sqrt{1-x^2}\cdot f''(x)=-1\cdot e^{\arccos x}-x\cdot\left\{e^{\arccos x}\cdot\left(-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right\}-f'(x)$

$-xf'(x)+(1-x^2)f''(x)=-f(x)+xe^{\arccos x}-\sqrt{1-x^2}\,f'(x)$

$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)=-f(x)+xe^{\arccos x}-\left\{-xe^{\arccos x}-f(x)\right\}$

$\therefore\ (1-x^2)f''(x)-xf'(x)=2xe^{\arccos x}$

点

4 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin x\cos x - x} = \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\{1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x)\}}{\{\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x)\}-1}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{-2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{-2}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

点

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+x) - x\sqrt{1-x}}{x^3}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x) + \{(1-x)-1\}(1-x)^{\frac{1}{2}}}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\log(1+x) + (1-x)^{\frac{3}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{-1} - \frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-(1+x)^{-2} + \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}}{6x}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{2(1+x)^{-3} + \frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}(1-x)^{-\frac{5}{2}}}{6}$$

$$= \frac{2+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}}{6}$$

$$= \frac{11}{24}$$

点

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\cos\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x\tan x}}$

$x \fallingdotseq 0$ のとき $\left(\cos\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x\tan x}} = e^{\log\left(\cos\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x\tan x}}} = e^{\frac{\log\left(\cos\frac{2x}{\pi}\right)}{x\tan x}}$

ここで

$$\lim_{x\to0}\frac{\log\left(\cos\frac{2x}{\pi}\right)}{x\tan x} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-\frac{2}{\pi}\sin\frac{2x}{\pi}}{\cos\frac{2x}{\pi}}}{1\cdot\tan x + x\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{-\frac{2}{\pi}\tan\frac{2x}{\pi}}{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\tan\frac{2x}{\pi}}{\frac{2x}{\pi}}\cdot\left(-\frac{4}{\pi^2}\right)}{\dfrac{\tan x}{x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{1\cdot\left(-\frac{4}{\pi^2}\right)}{1+1}$$

$$= -\frac{2}{\pi^2}$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\left(\cos\frac{2x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x\tan x}} = \lim_{x\to0} e^{\frac{\log\left(\cos\frac{2x}{\pi}\right)}{x\tan x}} = e^{-\frac{2}{\pi^2}}$$

点

5 次の関数の Maclaurin 展開をかっこ内の項まで求めよ．ただし，係数は既約分数にすること．必要ならば，次の Maclaurin 展開を用いてよい．

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots \quad (-1 < x \leqq 1)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2x}{3}-x^2}}$ （4 次以下）

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - x^2\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3}x-x^2\right)^2 - \frac{5}{16}\left(\frac{2}{3}x-x^2\right)^3 + \frac{35}{128}\left(\frac{2}{3}x-x^2\right)^4 - \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - x^2\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4\right) - \frac{5}{16}\left(\frac{8}{27}x^3 - \frac{4}{3}x^4 + \cdots\right) + \frac{35}{128}\left(\frac{16}{81}x^4 - \cdots\right) - \cdots$$

$$\begin{aligned} = 1 - \frac{1}{3}x &+ \frac{1}{2}x^2 \\ &+ \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^4 \\ &\qquad - \frac{5}{54}x^3 + \frac{5}{12}x^4 \\ &\qquad\qquad + \frac{35}{8\cdot 81}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

$$= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{16}{27}x^3 + \frac{137}{162}x^4 + \cdots$$

点

(2) $\log(1+\arcsin x)$ （5 次以下）

$$= (\arcsin x) - \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{3}(\arcsin x)^3 - \frac{1}{4}(\arcsin x)^4 + \frac{1}{5}(\arcsin x)^5 - \cdots$$

$$= \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}x^3 + \cdots\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^3 - \frac{1}{4}(x+\cdots)^4 + \frac{1}{5}(x+\cdots)^5 - \cdots$$

$$= \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \cdots\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \cdots\right) - \frac{1}{4}(x^4 + \cdots) + \frac{1}{5}(x^5+\cdots) - \cdots$$

$$\begin{aligned} = x &+ \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 \\ &- \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^4 \\ &+ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^5 \\ &- \frac{1}{4}x^4 \\ &+ \frac{1}{5}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{5}{12}x^4 + \frac{53}{120}x^5 + \cdots$$

点