科目名	微積分学 A 微積分学	対象	1OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 29 年 6 月 26 日 (月) 回目 (～ 時限目)				担当	石川　学	学年		氏名	
試験 時間	90 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評 点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

1 $A = \left\{ \dfrac{2n-5}{2n+1} + (-1)^n \cdot \dfrac{6n+7}{3n-1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ に対して $\sup A$ と $\inf A$ を求めよ.

点

2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!\,(3n)!\,n^{5n}}{(n!)^6\,(4n)!}}$ の値を求めよ.

点

3 次の問いに答えよ.

(1) $\arctan \sqrt{\dfrac{3x+5}{8x+13}}$ を微分せよ.

点

(2) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ のとき，$(1-x^2)f''(x) - 5xf'(x) - 3f(x)$ を簡単にせよ.

点

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\log(1-x)-1}{\sin x\cos x - x\cos 2x}$

点

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{\cos x}-e^x}{x^2}$

点

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{6x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x\tan 9x}}$

点

$\boxed{5}$ 次の関数の Maclaurin 展開ををかっこ内の項まで求めよ．ただし，**係数は既約分数**にすること．必要ならば，次の Maclaurin 展開を用いてよい．

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots \quad (-1<x\leqq 1)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots \quad (-1<x\leqq 1)$$

$$\tan x = x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$ （4 次以下）

点

(2) $\log(1+\tan x)$ （5 次以下）

点

科目名	微積分学 A 微積分学	対 象	1OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号	
平成 29 年 6 月 26 日 (月) 回目 (〜 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名	
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評 点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします．

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません．

$\boxed{1}$ $A = \left\{ \dfrac{2n-5}{2n+1} + (-1)^n \cdot \dfrac{6n+7}{3n-1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ に対して

$\sup A$ と $\inf A$ を求めよ．

ヒントと答え

演習／前期／第 4 回の【問題】(2) と同様に計算すればよい．

$a_n = \dfrac{2n-5}{2n+1} + (-1)^n \cdot \dfrac{6n+7}{3n-1}$ とおくと，一般項の評価は

$$-\frac{15}{2} \leqq a_{2m-1} < -1$$

$$3 < a_{2m} \leqq \frac{18}{5}$$

になる．答えは

$$\sup A = \frac{18}{5} \qquad \text{（3 点）}$$

$$\inf A = -\frac{15}{2} \qquad \text{（3 点）}$$

点

$\boxed{2}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!\,(3n)!\,n^{5n}}{(n!)^6\,(4n)!}}$ の値を求めよ．

ヒントと答え

演習／前期／第 5 回の【問題】(6) と同様に計算すればよい．

$a_n = \dfrac{(2n)!\,(3n)!\,n^{5n}}{(n!)^6\,(4n)!}$ とおくと

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3(3n+1)(3n+2)}{4(4n+1)(4n+3)} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{5n}$$

となるから

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)}{4\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{3}{n}\right)} \left\{ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \right\}^5$$

$$= \frac{27}{64} e^5$$

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{27}{64} e^5$ （4 点）

点

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\arctan \sqrt{\dfrac{3x+5}{8x+13}}$ を微分せよ．

ヒントと答え

演習／前期／第 6 回の【問題】(4) と同様に計算すればよい．

答えは

$$\frac{-1}{2(11x+18)(8x+13)} \sqrt{\frac{8x+13}{3x+5}} \qquad \text{（4 点）}$$

$$\frac{-1}{2(11x+18)(3x+5)} \sqrt{\frac{3x+5}{8x+13}} \qquad \text{（4 点）}$$

$$\frac{-1}{2(11x+18)(8x+13)\sqrt{\dfrac{3x+5}{8x+13}}} \qquad \text{（4 点）}$$

のどれか．

点

(2) $f(x) = \dfrac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ のとき，$(1-x^2)f''(x) - 5xf'(x) - 3f(x)$ を簡単にせよ．

ヒントと答え

演習／前期／第 6 回の【問題】(9) と同様に計算すればよい．

$f(x) = \dfrac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ のとき

$$(1-x^2)^{\frac{3}{2}} f(x) = \arccos x$$

両辺を微分してから，両辺に $\sqrt{1-x^2}$ をかけると

$$-3xf(x) + (1-x^2)f'(x) = -\frac{1}{1-x^2}$$

さらに微分してまとめると

$$(1-x^2)f''(x) - 5xf'(x) - 3f(x) = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} \qquad \text{（5 点）}$$

※ $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{1-x^2} + 3x\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$

と

$$f''(x) = \frac{-7x\sqrt{1-x^2} + (3+12x^2)\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$$

を求めて代入してもよい．

点

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\log(1-x)-1}{\sin x\cos x - x\cos 2x}$

ヒントと答え
演習／前期／第 7 回の【問題】や，演習／前期／第 9 回の【問題 2】と同様に計算すればよい．

答えは　$\displaystyle -\frac{1}{8}$　（5 点）

点

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt{\cos x}-e^x}{x^2}$

ヒントと答え
演習／前期／第 7 回の【問題】や，演習／前期／第 9 回の【問題 2】と同様に計算すればよい．

答えは　$\displaystyle -\frac{3}{4}$　（5 点）

点

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos\frac{6x}{\pi}\right)^{\frac{1}{x\tan 9x}}$

ヒントと答え
演習／前期／第 7 回の【問題】(8) と同様に計算すればよい．

答えは　$e^{-\frac{2}{\pi^2}}$　（5 点）

点

$\boxed{5}$ 次の関数の Maclaurin 展開ををかっこ内の項まで求めよ．ただし，**係数は既約分数**にすること．必要ならば，次の Maclaurin 展開を用いてよい．

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots\quad(-1<x\leqq 1)$$

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots\quad(-1<x\leqq 1)$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\quad\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$　（4 次以下）

ヒントと答え
演習／前期／第 8 回の【問題】と同様に計算すればよい．

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}\\
&=1-\frac{1}{2}(x+x^2)+\frac{3}{8}(x+x^2)^2\\
&\qquad-\frac{5}{16}(x+x^2)^3+\frac{35}{128}(x+x^2)^4+\cdots\\
&=1-\frac{1}{2}(x+x^2)+\frac{3}{8}(x^2+2x^3+x^4)\\
&\qquad-\frac{5}{16}(x^3+3x^4+\cdots)+\frac{35}{128}(x^4+\cdots)+\cdots\\
&=1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{7}{16}x^3-\frac{37}{128}x^4+\cdots
\end{aligned}$$

（各項順に 1 点，1 点，1 点，2 点，3 点）

点

(2) $\log(1+\tan x)$　（5 次以下）

ヒントと答え
演習／前期／第 8 回の【問題】と同様に計算すればよい．

$$\begin{aligned}
&\log(1+\tan x)\\
&=\tan x-\frac{1}{2}(\tan x)^2+\frac{1}{3}(\tan x)^3-\frac{1}{4}(\tan x)^4+\frac{1}{5}(\tan x)^5+\cdots\\
&=\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)^2\\
&\qquad+\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}x^3+\cdots\right)^3-\frac{1}{4}(x+\cdots)^4+\frac{1}{5}(x+\cdots)^5+\cdots\\
&=\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{2}{3}x^4+\cdots\right)\\
&\qquad+\frac{1}{3}(x^3+x^5+\cdots)-\frac{1}{4}(x^4+\cdots)+\frac{1}{5}(x^5+\cdots)+\cdots\\
&=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{12}x^4+\frac{2}{3}x^5+\cdots
\end{aligned}$$

（各項順に 1 点，1 点，1 点，2 点，3 点）

点