科目名	微積分学 A 微積分学	対象	1OB-AB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
	平成 29 年 8 月 7 日 (月)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年	氏名				
試験 時間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							

平成 29 年度前期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

- 1 (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ。(1) は答えのみでよい。

$$\frac{-x^2 + x - 4}{(x + 4)(x^2 + 6x + 16)} = \frac{A}{x + 4} + \frac{Bx + C}{x^2 + 6x + 16}$$

- (2) $\int \frac{-x^2 + x - 4}{(x + 4)(x^2 + 6x + 16)} dx$ を求めよ。

- 2 $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくことにより, $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 6}{(\sin x + \cos x + 2) \sin x} dx$ を求めよ。

- 3 $\sqrt{4x^2 + 3x + 7} + 2x = t$ とおくことにより, $\int \frac{13}{(x - 6)\sqrt{4x^2 + 3x + 7}} dx$ を求めよ。

- 4 次を求めよ。

(1) $\int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \arctan x dx$

(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(\arccos x)^4 \sqrt{1-x^2}} dx$

- 5 次を求めよ。

(1) $\int_0^{e^4} x^{-\frac{1}{4}} \log x dx$

(2) $\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x^5} dx$

- ★答えの符号ミス → 各 2 点減点
- ★絶対値忘れ → 各 1 点減点
- ★約分忘れ → 各 1 点減点
- ★まとめ不足やミス → その程度により 1 点～ 5 点減点

□ (1) 次の等式が成り立つような定数 A, B, C の値を求めよ。(1) は答えのみでよい。

$$\frac{-x^2 + x - 4}{(x+4)(x^2 + 6x + 16)} = \frac{A}{x+4} + \frac{Bx + C}{x^2 + 6x + 16}$$

(2) $\int \frac{-x^2 + x - 4}{(x+4)(x^2 + 6x + 16)} dx$ を求めよ。

ヒントと答え

演習／前期／第 10 回の【問題】(1) と同様に計算すればよい。

(1) $A = -3, B = 2, C = 11$ (各 3 点)

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{-x^2 + x - 4}{(x+4)(x^2 + 6x + 16)} dx &= \int \left(-\frac{3}{x+4} + \frac{2x+11}{x^2 + 6x + 16} \right) dx \\ &= \int \left\{ -\frac{3}{x+4} + \frac{(2x+6)+5}{x^2 + 6x + 16} \right\} dx \\ &= \int \left\{ -\frac{3}{x+4} + \frac{2x+6}{x^2 + 6x + 16} + \frac{5}{(\sqrt{7})^2 + (x+3)^2} \right\} dx \\ &= -3 \log|x+4| + \log(x^2 + 6x + 16) + \frac{5}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x+3}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

(順に 3 点, 3 点, 5 点)

□ $\tan \frac{x}{2} = t$ とおくことにより, $\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 6}{(\sin x + \cos x + 2) \sin x} dx$ を求めよ。

ヒントと答え

演習／前期／第 11 回の【問題】(1) と同様に計算すればよい。

$t = \tan \frac{x}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 6}{(\sin x + \cos x + 2) \sin x} dx &= \int \frac{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 6}{\left(\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 2 \right) \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{3t^2 + 4t + 9}{t(t^2 + 2t + 3)} dt \quad (2 \text{ 点}) \\ &= \int \left(\frac{3}{t} - \frac{2}{t^2 + 2t + 3} \right) dt \quad (3 \text{ 点}) \\ &= \int \left\{ \frac{3}{t} - \frac{2}{(\sqrt{2})^2 + (t+1)^2} \right\} dt \\ &= 3 \log|t| - \sqrt{2} \arctan \frac{t+1}{\sqrt{2}} \quad (順に 2 点, 3 点) \end{aligned}$$

(本来は x に戻すが, ここまでで採点する)

※部分分数分解は

$$\frac{3t^2 + 4t + 9}{t(t^2 + 2t + 3)} = \frac{3(t^2 + 2t + 3) - 2t}{t(t^2 + 2t + 3)} = \frac{3}{t} - \frac{2}{t^2 + 2t + 3}$$

と式変形で求めるか

$$\frac{3t^2 + 4t + 9}{t(t^2 + 2t + 3)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 2t + 3}$$

と設定して, 定数 A, B, C を求めればよい。

3 $\sqrt{4x^2 + 3x + 7} + 2x = t$ とおくことにより, $\int \frac{13}{(x-6)\sqrt{4x^2 + 3x + 7}} dx$ を求めよ.

ヒントと答え

演習/前期/第 11 回の【問題】(2) と同様に計算すればよい.

$$t = \sqrt{4x^2 + 3x + 7} + 2x \text{ とおくと } t - 2x = \sqrt{4x^2 + 3x + 7}$$

$$\text{両辺 2 乗して } t^2 - 4tx + 4x^2 = 4x^2 + 3x + 7 \quad \therefore x = \frac{t^2 - 7}{4t + 3} \quad (1 \text{ 点})$$

$$\text{また } \frac{dx}{dt} = \frac{2t \cdot (4t + 3) - (t^2 - 7) \cdot 4}{(4t + 3)^2} = \frac{2(2t^2 + 3t + 14)}{(4t + 3)^2} \quad (1 \text{ 点})$$

$$\text{さらに } \sqrt{4x^2 + 3x + 7} = t - 2x = t - 2 \cdot \frac{t^2 - 7}{4t + 3} = \frac{2t^2 + 3t + 14}{4t + 3} \quad (1 \text{ 点})$$

よって

$$\begin{aligned} \int \frac{13}{(x-6)\sqrt{4x^2 + 3x + 7}} dx &= \int \frac{13}{\left(\frac{t^2 - 7}{4t + 3} - 6\right) \frac{2t^2 + 3t + 14}{4t + 3}} \cdot \frac{2(2t^2 + 3t + 14)}{(4t + 3)^2} dt \\ &= \int \frac{26}{t^2 - 24t - 25} dt \quad (2 \text{ 点}) \\ &= \int \frac{26}{(t+1)(t-25)} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{t-25} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \log|t-25| - \log|t+1| \quad (5 \text{ 点}) \end{aligned}$$

(本来は x に戻すが, ここまでで採点する)

4 次を求めよ.

$$(1) \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \arctan x dx \quad (2) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(\arccos x)^4 \sqrt{1-x^2}} dx$$

ヒントと答え

演習/前期/第 12 回の【問題】と同様に計算すればよい.

$$\begin{aligned} (1) \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \arctan x dx &= \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \\ &= \left\{ (1+\sqrt{2}) \cdot \frac{3}{8}\pi - (1-\sqrt{2}) \cdot \left(-\frac{\pi}{8}\right) \right\} - \frac{1}{2} \{ \log(4+2\sqrt{2}) - \log(4-2\sqrt{2}) \} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\pi - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{4}\pi - \log(1+\sqrt{2}) \quad (10 \text{ 点}) \end{aligned}$$

※ $\arctan(1-\sqrt{2}) = -\frac{\pi}{8}$ であることは, 演習/前期/第 12 回の【問題】(2) で紹介してある.

また, (求め方その 2) の三角形を立てれば, $\arctan(1+\sqrt{2}) = \frac{3}{8}\pi$ であることもわかる.

$$\begin{aligned} (2) \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(\arccos x)^4 \sqrt{1-x^2}} dx &= - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (\arccos x)^{-4} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\ &= - \left[-\frac{1}{3} (\arccos x)^{-3} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{4}{\pi}\right)^3 - \left(\frac{3}{\pi}\right)^3 \right\} \\ &= \frac{37}{3\pi^3} \quad (10 \text{ 点}) \end{aligned}$$

5 次を求めよ.

$$(1) \int_0^{e^4} x^{-\frac{1}{4}} \log x dx$$

$$(2) \int_1^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x^5} dx$$

ヒントと答え

演習/前期/第13回の【問題】と同様に計算すればよい.

$$\begin{aligned} (1) \int x^{-\frac{1}{4}} \log x dx &= \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \log x - \frac{4}{3} \int x^{-\frac{1}{4}} dx \\ &= \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \log x - \frac{16}{9} x^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \log x & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \\ \frac{1}{x} & & x^{-\frac{1}{4}} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{e^4} x^{-\frac{1}{4}} \log x dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^{e^4} x^{-\frac{1}{4}} \log x dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} \log x - \frac{16}{9} x^{\frac{3}{4}} \right]_\varepsilon^{e^4} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left\{ \frac{4}{3} (e^3 \cdot 4 - \varepsilon^{\frac{3}{4}} \log \varepsilon) - \frac{16}{9} (e^3 - \varepsilon^{\frac{3}{4}}) \right\} \\ &= \frac{16}{3} e^3 - \frac{16}{9} e^3 \\ &= \frac{32}{9} e^3 \quad (10 \text{点}) \end{aligned}$$

※ $\lim_{x \rightarrow +0} x^\alpha \log x = 0$ ($\alpha > 0$) は用いてよい. L'Hospital の定理を用いて簡単に示せる.

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{\log(x^2+1)}{x^5} dx &= -\frac{\log(x^2+1)}{4x^4} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^3(x^2+1)} dx \\ &= -\frac{\log(x^2+1)}{4x^4} + \frac{1}{2} \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} \right) dx \\ &= -\frac{\log(x^2+1)}{4x^4} + \frac{1}{2} \left\{ -\log|x| - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \log(x^2+1) \right\} \\ &= -\frac{\log(x^2+1)}{4x^4} + \frac{1}{4} \log \frac{x^2+1}{x^2} - \frac{1}{4x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \log(x^2+1) & \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} & -\frac{1}{4x^4} \\ \frac{2x}{x^2+1} & & \frac{1}{x^5} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{\log(x^2+1)}{x^5} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{\log(x^2+1)}{x^5} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{\log(x^2+1)}{4x^4} + \frac{1}{4} \log \frac{x^2+1}{x^2} - \frac{1}{4x^2} \right]_1^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{4} \left\{ \frac{\log(R^2+1)}{R^4} - \frac{\log 2}{1} \right\} + \frac{1}{4} \left(\log \frac{R^2+1}{R^2} - \log 2 \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R^2} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \log 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \log 2 \\ &= \frac{1}{4} \quad (10 \text{点}) \end{aligned}$$

※部分分数分解は

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)} = \frac{(x^2+1) - x^2}{x^3(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{(x^2+1) - x^2}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$$

と式変形で求めるか

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

と設定して, 定数 A, B, C, D, E を求めればよい.