

科目名	解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 23 年 6 月 23 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

1 以下において $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) とする.
(1) $u(x, y) = e^y(x \cos x + y \sin x + \sin x)$ のとき, f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ. またそのときの f と f' を z で表せ.

(2) $u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + x + y}{(x + 1)^2 + y^2}$, $v(x, y) = \frac{x + y + 1}{(x + 1)^2 + y^2}$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ. 答のみでよい.

(3) $u(x, y) = 2x^4 - 3y^3 + 3y^2$, $v(x, y) = 2x^3y - 2x^3 + 3xy^2$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ. 答のみでよい.

(4) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$ (定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

[2] (1) は方程式をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求め, (2) と (3) は値を求めよ.

(1) $\cos 2z + 9 \cos z - 4 = 0$

(3) $(-1 + \sqrt{3}i)^{-1+2i}$

[3] 実数における $\overset{\text{マクローリン}}{\text{Maclaurin}}$ 展開を用い, 形式的計算で
かまわないから, $\overset{\text{オイラー}}{\text{Euler}}$ の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

を導け.

(2) $\sin \left(2i - \frac{5}{6}\pi \right)$

科目名	解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 23 年 6 月 23 日 (木)	2 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

① 以下において $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) とする.

(1) $u(x, y) = e^y(x \cos x + y \sin x + \sin x)$ のとき, f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ. またそのときの f と f' を z で表せ.

$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ 級

$$u_x = e^y(2 \cos x - x \sin x + y \cos x)$$

$$u_y = e^y(x \cos x + y \sin x + 2 \sin x)$$

よって, C-R 条件より

$$\begin{cases} v_x = e^y(-x \cos x - y \sin x - 2 \sin x) & \dots \textcircled{1} \\ v_y = e^y(2 \cos x - x \sin x + y \cos x) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = e^y(-x \cos x - y \sin x - 2 \sin x) & \dots \textcircled{1} \\ v_y = e^y(2 \cos x - x \sin x + y \cos x) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

とみたす v を求めればよい.

① より

$$v = \int e^y(-x \cos x - y \sin x - 2 \sin x) dx$$

$$= e^y(-x \sin x + \cos x + y \cos x) + \varphi(y)$$

これとき

$$v_y = e^y(-x \sin x + 2 \cos x + y \cos x) + \varphi'(y)$$

これを ② と比較して

$$\varphi'(y) = 0 \quad \therefore \varphi(y) = C \text{ (定数)}$$

ゆえに

$$v = e^y(-x \sin x + \cos x + y \cos x) + C$$

これより

$$f = u + iv$$

$$= e^y(x \cos x + y \sin x + \sin x)$$

$$+ i\{e^y(-x \sin x + y \cos x + \cos x) + C\}$$

$$= e^y\{x(\cos x - i \sin x) + iy(\cos x - i \sin x) + i(\cos x - i \sin x)\} + iC$$

$$= e^y(\cos x - i \sin x)(x + iy + i) + iC$$

$$= e^{y-ix}(x + iy + i) + iC$$

$$= e^{-i(x+iy)}(x + iy + i) + iC$$

$$= (z + i)e^{-iz} + iC$$

また

$$f' = 1 \cdot e^{-iz} + (z + i) \cdot (-ie^{-iz})$$

$$= (2 - iz)e^{-iz}$$

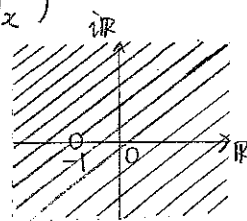
$$(2) u(x, y) = \frac{x^2 + y^2 + x + y}{(x+1)^2 + y^2}, v(x, y) = \frac{x + y + 1}{(x+1)^2 + y^2}$$

のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ. 答のみでよい.

$u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ 級

$$\begin{cases} u_x = \frac{x^2 - y^2 - 2xy + 2x - 2y + 1}{\{(x+1)^2 + y^2\}^2} = v_y \\ u_y = \frac{x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 2y + 1}{\{(x+1)^2 + y^2\}^2} = -v_x \end{cases} \quad \text{C-R}$$

$f: \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ で微分可能



(3) $u(x, y) = 2x^4 - 3y^3 + 3y^2$, $v(x, y) = 2x^3y - 2x^3 + 3xy^2$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ. 答のみでよい.

$u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ 級

$$u_x = 8x^3, u_y = -9y^2 + 6y$$

$$v_x = 6x^2y - 6x^2 + 3y^2, v_y = 2x^3 + 6xy$$

より, C-R 条件

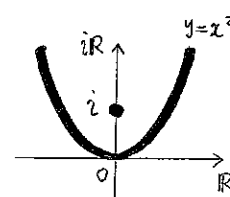
$$\begin{cases} 8x^3 = 2x^3 + 6xy & \dots \textcircled{1} \\ -9y^2 + 6y = -(6x^2y - 6x^2 + 3y^2) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } x=0 \vee y=x^2$$

$$\textcircled{2} \text{ より } y=1 \vee y=x^2$$

よって, ① ∧ ② より

$$(x, y) = (0, 1) \vee y = x^2$$



(4) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$ (定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

他の過去問に解答あります.

2 (1) は方程式をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求め, (2) と (3) は値を求めよ.

$$(1) \cos 2z + 9 \cos z - 4 = 0$$

2倍角の公式を用いて変形すると

$$(\cos z + 5)(2 \cos z - 1) = 0 \quad \therefore \cos z = -5 \vee \cos z = \frac{1}{2}$$

$$(i) \cos z = -5 \text{ について}$$

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}) \text{ とおくと}$$

$$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = -5$$

$$\therefore \begin{cases} \cos x \cosh y = -5 & \dots \textcircled{1} \\ \sin x \sinh y = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } \sin x = 0 \vee \sinh y = 0$$

$$(i-1) \sin x = 0 \text{ のとき } x = m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \cos m\pi \cosh y = -5 \quad \therefore \cosh y = (-1)^{m+1} \cdot 5$$

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq \sqrt{e^y \cdot e^{-y}} = 2 \quad \text{より } m+1 = 2m \quad (m \in \mathbb{Z}) \text{ である}$$

$$\therefore \text{ のとき } \cosh y = 5 \text{ より}$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 5$$

$$(e^y)^2 - 10e^y + 1 = 0$$

$$e^y = 5 \pm 2\sqrt{6} \quad \therefore y = \log(5 \pm 2\sqrt{6})$$

$$(i-2) \sinh y = 0 \text{ のとき } y = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \cos x = -5 \text{ とおくと, このとき } x \in \mathbb{R} \text{ は存在しない}$$

$$(ii) \cos z = \frac{1}{2} \text{ について}$$

$$(i) \text{ と同様に解いてもいいが, } -1 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \text{ であるから普通に解いて}$$

$$z = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

以上 (i), (ii) より

$$z = (2m-1)\pi + i \log(5 \pm 2\sqrt{6}) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

また

$$z = \pm \frac{\pi}{3} + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$(2) \sin\left(2i - \frac{5}{6}\pi\right)$$

$$= \sin 2i \cdot \cos \frac{5}{6}\pi - \cos 2i \cdot \sin \frac{5}{6}\pi$$

$$= i \sinh 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \cosh 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= i \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{e^2 + e^{-2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(e^2 + \frac{1}{e^2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(e^2 - \frac{1}{e^2}\right)i$$

$$(3) (-1 + \sqrt{3}i)^{-1+2i}$$

$$\log(-1 + \sqrt{3}i) = \log 2 + i\left(\frac{2}{3}\pi + 2m\pi\right) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

これから

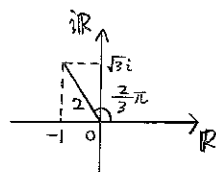
$$(-1 + \sqrt{3}i)^{-1+2i}$$

$$= e^{(-1+2i)\log(-1+\sqrt{3}i)}$$

$$= e^{(-1+2i)\left\{\log 2 + i\left(\frac{2}{3}\pi + 2m\pi\right)\right\}}$$

$$= e^{-\log 2 - \frac{4}{3}\pi - 4m\pi + i\left(2\log 2 - \frac{2}{3}\pi - 2m\pi\right)}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\frac{4}{3}\pi - 4m\pi} \left\{ \cos\left(2\log 2 - \frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(2\log 2 - \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \quad (m \in \mathbb{Z})$$



3 実数における Maclaurin 展開を用い, 形式的計算で
かまわないから, Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$$

を導け.

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned}$$