

科目名	解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 23 年 7 月 28 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 千記のみ参照・持込可 ()							

平成 23 年度前期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

- 1

以下において $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とする. ただし, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) で u, v は実数値とする.

(1) $u(x, y) = 4x^3 + 6x^2 - \frac{y^4}{4}$, $v(x, y) = xy^3 + y^3$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ. 答のみでよい.

(2) $u(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x)$ のとき, f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ. またそのときの f と f' を z で表せ. 答のみでよい.

(3) f が領域 D で正則で $|f| = 1$ のとき, f は D で定数であることを示せ.
- 2

(1) は方程式をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求め, (2) と (3) は値を求めよ. 答のみでよい.

(1) $\sin z = 6$ (2) $\tan 2i$ (3) $(\sqrt{3} + i)^{2-3i}$
- 3

次の複素積分の値を求めよ.

(1) $\int_C z \operatorname{Im} z dz$ $C : z = t^2 - it \quad (-1 \leq t \leq 2)$

(2) $\int_C \bar{z} dz$ $C : z = t + \frac{i}{t} \quad (1 \leq t \leq 2)$

(3) $\int_C (\operatorname{Re} z)^2 dz$ $C : z = \sin t + it^2 \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$

$$25 + 15 + 30 = 70$$

東京理科大学 平成 年 月 日 試験 答案

評 点

科目名		担当先生
該学部 で 学ぶ	理学部 工学部	氏名

1 (1) $u = 4x^3 + 6x^2 - \frac{y^4}{4}$, $u_x = 12x^2 + 12x$, $u_y = -y^3$

$$v = xy^3 + y^3, v_x = y^3, v_y = 3xy^2 + 3y^2$$

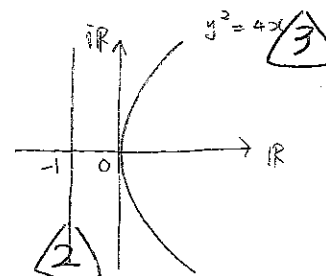
$$C-R: u_x = v_y \quad \dots \quad 12x^2 + 12x = 3xy^2 + 3y^2$$

$$4x(x+1) = (x+1)y^2$$

$$(x+1)(4x-y^2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ or } y^2 = 4x$$

$$u_y = -v_x \quad \dots \quad -y^3 = -y^3 \text{ 成立}$$



(2) $u = e^{-y} (x \cos x - y \sin x)$

$$u_x = e^{-y} \{1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) - y \cos x\} = e^{-y} (\cos x - x \sin x - y \cos x)$$

$$u_y = -e^{-y} \cdot (x \cos x - y \sin x) + e^{-y} \cdot (-\sin x) = e^{-y} (-\sin x - x \cos x + y \sin x)$$

C-R 条件

$$v_x = -u_y = e^{-y} (\sin x + x \cos x - y \sin x) \quad \text{--- ①}$$

$$v_y = u_x = e^{-y} (\cos x - x \sin x - y \cos x) \quad \text{--- ②}$$

①より

$$v = \int v_x dx = \int e^{-y} (\sin x + x \cos x - y \sin x) dx = e^{-y} \{-\cos x + (x \sin x + \cos x) + y \cos x\} + \varphi(y)$$

$$= e^{-y} (x \sin x + y \cos x) + \varphi(y)$$

②より

$$v_y = -e^{-y} \cdot (x \sin x + y \cos x) + e^{-y} \cdot \cos x + \varphi'(y) = e^{-y} (\cos x - x \sin x - y \cos x) + \varphi'(y)$$

②と比較して $\varphi'(y) = 0 \quad \therefore \varphi(y) = C \text{ (const.)} \quad \therefore v = e^{-y} (x \sin x + y \cos x) + C$

$$f = u + iv = e^{-y} (x \cos x - y \sin x) + ie^{-y} (x \sin x + y \cos x) + iC$$

$$= e^{-y} \{x(\cos x + i \sin x) + iy(\cos x + i \sin x)\} + iC = (x + iy) e^{-y + ix} + iC$$

$$= (x + iy) e^{i(x + iy)} + iC = z e^{iz} + iC$$

また

$$f' = u_x + iv_x = e^{-y} (\cos x - x \sin x - y \cos x) + ie^{-y} (\sin x + x \cos x - y \sin x)$$

$$= e^{-y} \{(\cos x + i \sin x) + ix(\cos x + i \sin x) - y(\cos x + i \sin x)\}$$

$$= e^{-y + ix} (1 + ix - y) = (iz + 1) e^{iz}$$

(3) $|f| = 1$ より $u^2 + v^2 = 1$

$$\begin{cases} 2u \cdot u_x + 2v \cdot v_x = 0 \\ 2u \cdot u_y + 2v \cdot v_y = 0 \end{cases}$$

他の問題
を見ればわかる。

C-R

$$\begin{cases} u u_x - v u_y = 0 \\ u u_y + v u_x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{vmatrix} u_x & -u_y \\ u_y & u_x \end{vmatrix} = u_x^2 + u_y^2 = 0 \quad \therefore u_x = u_y = 0$$

[2] (1) $\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y = 6$ $\Rightarrow \sin x \cosh y = 6$ — ① & $\cos x \sinh y = 0$ — ②

② $\Rightarrow \cos x = 0$ or $\sinh y = 0 \quad \therefore x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ or $y = 0 \quad (n \in \mathbb{Z})$

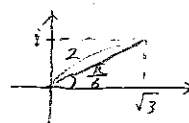
(i) $x = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ or $\pm$, ① $\Rightarrow (-1)^n \cosh y = 6 \quad \therefore \cosh y = 6 \cdot (-1)^n$

$\cosh y \geq 1 \quad \Rightarrow n = 2m \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad \therefore \cosh y = 6 \quad \Rightarrow y = \log(6 \pm \sqrt{35})$

(ii) $y = 0$ or $\pm$, ① $\Rightarrow \sin x = 6$ $\Rightarrow$ 无解 $\forall x \in \mathbb{R}$ 不存在 (无解)

以上 (i), (ii) $\Rightarrow \quad \boxed{Z = \frac{\pi}{2} + 2m\pi + i \log(6 \pm \sqrt{35})} \quad (m \in \mathbb{Z})$

(2) $\tan 2i = \frac{\sin 2i}{\cos 2i} = \frac{i \sinh 2}{\cosh 2} = \frac{\frac{e^2 - e^{-2}}{2}}{\frac{e^2 + e^{-2}}{2}} i = \frac{e^4 - 1}{e^4 + 1} i$



(3) $(2-3i) \log(\sqrt{3}+i) = (2-3i) \left\{ \log 2 + i \left(\frac{\pi}{6} + 2n\pi \right) \right\} = 2 \log 2 + \frac{\pi}{2} + 6n\pi + i(-3 \log 2 + \frac{\pi}{3} + 4n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z})$

$(\sqrt{3}+i)^{2-3i} = e^{(2-3i) \log(\sqrt{3}+i)} = e^{2 \log 2 + \frac{\pi}{2} + 6n\pi + i(-3 \log 2 + \frac{\pi}{3} + 4n\pi)}$

$= 4 e^{\frac{\pi}{2} + 6n\pi} \left\{ \cos(-3 \log 2 + \frac{\pi}{3}) + i \sin(-3 \log 2 + \frac{\pi}{3}) \right\} \quad (n \in \mathbb{Z})$

[3] (1) $C: z = t^2 - it \quad (-1 \leq t \leq 2), \quad \frac{dz}{dt} = 2t - i$

$\int_C z \operatorname{Im} z \, dz = \int_{-1}^2 (t^2 - it) \cdot (-t) \cdot (2t - i) dt = \int_{-1}^2 (-2t^4 + t^2 + 3it^3) dt = \left[-\frac{2}{5}t^5 + \frac{t^3}{3} + \frac{3i}{4}t^4 \right]_{-1}^2$

$= -\frac{2}{5}\{32 - (-1)\} + \frac{1}{3}\{8 - (-1)\} + \frac{3i}{4}(16 - 1) = -\frac{51}{5} + \frac{45}{4}i$

(2) $C: z = t + \frac{i}{t} \quad (1 \leq t \leq 2), \quad \frac{dz}{dt} = 1 - \frac{i}{t^2}$

$\int_C \bar{z} \, dz = \int_1^2 \left(t - \frac{i}{t}\right) \cdot \left(1 - \frac{i}{t^2}\right) dt = \int_1^2 \left(t - \frac{1}{t^3} - \frac{2}{t}i\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2t^2} - 2i \log|t|\right]_1^2$

$= \frac{1}{2}(4 - 1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - 1\right) - 2i(\log 2 - 0) = \frac{9}{8} - 2i \log 2$

(3) $C: z = \sin t + it^2 \quad (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}), \quad \frac{dz}{dt} = \cos t + 2it$

$\int_C (\operatorname{Re} z)^2 \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot (\cos t + 2it) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{\sin^2 t \cos t + i t(1 - \cos 2t)\} dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin^2 t \cos t + i \left(t - t \cos 2t \right) \right\} dt = \left[\frac{1}{3} \sin^3 t + i \left\{ \frac{t^2}{2} - \left(\frac{t}{2} \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t \right) \right\} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{1}{3}(1 - 0) + i \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - 0 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 \cdot 0 \right) - \frac{1}{4} \{(-1) - 1\} \right] = \frac{1}{3} + \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) i$

[2] (1) $\boxed{Z = \frac{\pi}{2} + 2m\pi + i \log(6 \pm \sqrt{35})} \quad (m \in \mathbb{Z})$ (2) $\tan 2i = \frac{e^4 - 1}{e^4 + 1} i$

(3) $4 e^{\frac{\pi}{2} + 6n\pi} \left\{ \cos(-3 \log 2 + \frac{\pi}{3}) + i \sin(-3 \log 2 + \frac{\pi}{3}) \right\} \quad (n \in \mathbb{Z})$

[3] (1) $-\frac{51}{5} + \frac{45}{4}i$ (2) $\frac{9}{8} - 2i \log 2$ (3) $\frac{1}{3} + \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2} \right) i$

符号 $\triangle$
i $\triangle$