

科目名	解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 24 年 11 月 15 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間		注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 (1 1 月 2 9 日の授業終了時まで提出。答えのみは不可。)							

1 次の積分を求めよ。ただし、積分経路は正の向きとする。

(1) $\int_{|z|=6} \frac{z^2 - 5}{z(z - 3)} dz$

(2) $\int_{|z|=1} \frac{z + 3i}{2z^2 + 5iz - 2} dz$

(3) $\int_{|z|=1} \frac{4z - 5}{z(2z - 1)(3z + 1)} dz$

(4) $\int_{|z-3|=2} \frac{z^2 + 1}{(z + 2)(z - 3)^2} dz$

(5) $\int_{|z-i|=1} \frac{1}{(4z^2 + 1)^3} dz$

(6) $\int_{|z|=5} \frac{z^2 + z + 2}{(z + 3)(z^2 - 4)^2} dz$

□2 $R > 0$ を十分大きくとる. $f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$ と

$$C_1 : z = x \quad (-R \leq x \leq R),$$

$$C_2 : z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

$$C_3 : |z - i| = \frac{1}{3} \quad (\text{正の向き}),$$

$$C_4 : |z - 2i| = \frac{1}{3} \quad (\text{正の向き})$$

を考えることにより, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$ を求めよ.

$$\sum \text{Res} = 0$$

12 + 18

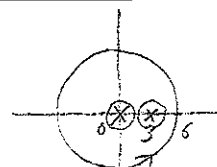
東京理科大学 平成 年 月 日 試験 答案

評 点

科目名					担当	先生
学部	理学部	1	部	学科	年	番
学部	工学部	2	部	学科	年	番
氏名	H24 後・中					

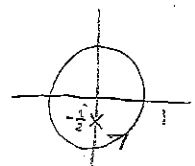
$$(1) \int_{|z|=6} \frac{z^2-5}{z(z-3)} dz = \int_{|z|=1} \frac{z^2-5}{z} dz + \int_{|z-3|=1} \frac{z^2-5}{z-3} dz = 2\pi i \left(\frac{z^2-5}{z} \Big|_{z=0} + \frac{z^2-5}{z-3} \Big|_{z=3} \right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{5}{3} + \frac{4}{3} \right) = 6\pi i$$



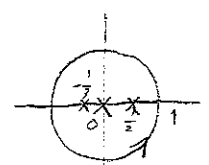
$$(2) \int_{|z|=1} \frac{z+3i}{2z^2+5iz-2} dz = \int_{|z|=1} \frac{z+3i}{(z+2i)(2z+i)} dz = \int_{|z|=1} \frac{2(z+2i)}{z+\frac{i}{2}} dz = 2\pi i \cdot \frac{z+3i}{2z+4i} \Big|_{z=-\frac{i}{2}}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4}\pi i$$



$$(3) \int_{|z|=1} \frac{4z-5}{z(z-1)(3z+1)} dz = 2\pi i \left\{ \frac{4z-5}{(z-1)(3z+1)} \Big|_{z=0} + \frac{4z-5}{z(3z+1)} \Big|_{z=\frac{1}{3}} + \frac{4z-5}{z(z-1)} \Big|_{z=-\frac{1}{3}} \right\}$$

$$= 2\pi i \left(5 - \frac{6}{5} - \frac{19}{5} \right) = 0$$



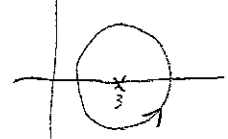
$$\times \int_{|z|=1} \frac{4z-5}{z(z-1)(3z+1)} dz = \int_{|z|=1} \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{3z+1} \right) dz = 2\pi i \left(A + \frac{B}{2} + \frac{C}{3} \right) = \frac{\pi}{3} i (6A+3B+2C) = 0$$

$$= A(2z-1)(3z+1) + Bz(3z+1) + Cz(z-1)$$

$$2z^2 - z = 0$$

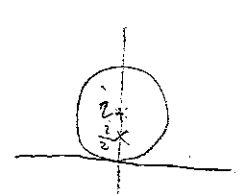
$$(4) \int_{|z-3|=2} \frac{z^2+1}{(z+2)(z-3)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\frac{z^2+1}{(z+2)} \right)' \Big|_{z=3} = 2\pi i \cdot \frac{z^2+4z-1}{(z+2)^2} \Big|_{z=3} = 2\pi i \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}\pi i$$

$$\times \left(\frac{z^2+1}{z+2} \right)' = \left(z-2 + \frac{5}{z+2} \right)' = 1 - \frac{5}{(z+2)^2}$$



$$(5) \int_{|z-i|=1} \frac{1}{(4z^2+1)^3} dz = \int_{|z-i|=1} \frac{4^3(z+\frac{i}{2})^3}{(z-\frac{i}{2})^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{1}{4^3(z+\frac{i}{2})^3} \right)' \Big|_{z=\frac{i}{2}}$$

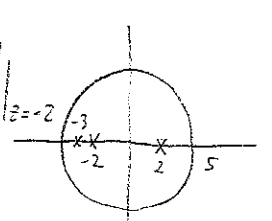
$$= \frac{\pi i}{4^3} \cdot \frac{12}{(z+\frac{i}{2})^5} \Big|_{z=\frac{i}{2}} = \frac{\pi i}{4^3} \cdot \frac{3}{i^5} = \frac{3}{16}\pi$$



$$(6) \int_{|z|=5} \frac{z^2+z+2}{(z+3)(z^2-4)^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{z^2+z+2}{(z^2-4)^2} \Big|_{z=-3} + \frac{2\pi i}{1!} \left\{ \frac{z^2+z+2}{(z+3)(z+2)^2} \right\}' \Big|_{z=2} + \frac{2\pi i}{1!} \left\{ \frac{z^2+z+2}{(z+3)(z-2)^2} \right\}' \Big|_{z=-2}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{8}{25} + 2\pi i \cdot \frac{-3}{200} + 2\pi i \cdot \frac{-5}{16}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{8 \cdot 16 - 3 - 5 \cdot 25}{25 \cdot 16} = 2\pi i \cdot \frac{128 - 3 - 125}{25 \cdot 16} = 0$$



$$\times \frac{z^2+z+2}{(z+3)(z^2-4)^2} = \frac{A}{z+3} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{(z+2)^2} + \frac{D}{z-2} + \frac{E}{(z-2)^2}$$

$$\int \frac{z^2+z+2}{(z+3)(z^2-4)^2} dz \xrightarrow{\text{int}} 2\pi i \cdot (A+B+D) = 0$$

$$z^2+z+2 = A(z+2)^2(z-2)^2 + B(z+3)(z+2)(z-2)^2 + C(z+3)(z-2)^2 + D(z+3)(z+2)^2(z-2) + E(z+3)(z+2)^2$$

$$4\text{次} \dots A+B+D=0$$

- (1) $6\pi i$
- (2) $\frac{5}{4}\pi i$
- (3) 0
- (4) $\frac{8}{5}\pi i$
- (5) $\frac{3}{16}\pi$
- (6) 0

4/2

$$\left\{ \frac{z^2+z+2}{(z+3)(z^2-4)^2} \right\}' = \frac{(2z+1) \cdot (z+3)(z^2-4)^2 - (z^2+z+2) \cdot \{1 \cdot (z^2-4)^2 + (z+3) \cdot 2(z^2-4)\}}{\{ (z+3)(z^2-4)^2 \}^2}$$

$$\Downarrow z = \pm 2 \text{ 代入}$$

$$\frac{(\pm 4+1)(\pm 2+3) \cdot 16 - (4 \pm 2+2) \cdot \{16 + (\pm 2+3) \cdot 2 \cdot (\pm 4)\}}{(1 \pm 3)^2 \cdot 16^2} = \begin{cases} \frac{5 \cdot 5 \cdot 16 - 8 \cdot (16 + 5 \cdot 2 \cdot 4)}{5^2 \cdot 16^2} = \frac{16(25 - 8 - 20)}{5^2 \cdot 16^2} = \frac{-3}{5^2 \cdot 16} \\ \frac{-3 \cdot 1 \cdot 16 - 4(16 + 1 \cdot 2 \cdot (-4))}{1^2 \cdot 16^2} = \frac{16(-3 - 4 + 2)}{16^2} = \frac{-5}{16} \end{cases}$$

2

$$f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} \quad \text{where } z \neq \pm i, \pm 2i$$

正則だから, Cauchyの積分定理より

$$\int_{C_1} f + \int_{C_2} f = \int_{C_3} f + \int_{C_4} f \quad (*)$$

$$(i) \int_{C_1} f = \int_{-R}^R \frac{x^3 e^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \int_{-R}^R \frac{x^3 (\cos x + i \sin x)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

$$\xrightarrow{(1)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$(ii) \left| \int_{C_2} f \right| = \left| \int_0^\pi \frac{R^3 e^{i3\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} \cdot i R e^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^\pi \frac{i R^4 e^{i(4\theta + R \cos \theta)} e^{-R \sin \theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} d\theta \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{i R^4 e^{i(4\theta + R \cos \theta)} e^{-R \sin \theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)(R^2 e^{2i\theta} + 4)} \right| d\theta$$

$$= \int_0^\pi \frac{R^4 e^{-R \sin \theta}}{|R^2 e^{2i\theta} + 1| |R^2 e^{2i\theta} + 4|} d\theta \leq \int_0^\pi \frac{R^4 e^{-R \sin \theta}}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} d\theta \xrightarrow{(1)} \frac{2R^4}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta$$

$$\leq \frac{2R^4}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} \int_0^\pi e^{-R \cdot \frac{2}{\pi} \theta} d\theta = \frac{2R^4}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} \left[-\frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2R}{\pi} \theta} \right]_0^\pi$$

$$\xrightarrow{(1)} \frac{-\pi R^3}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} (e^{-R} - 1) = \frac{\pi R^3}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)} (1 - e^{-R}) \xrightarrow{(1)} 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$(iii) \int_{C_3} f = \int_{C_3} \frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)(z^2+4)} dz = 2\pi i \cdot \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+4)} \Big|_{z=i} = 2\pi i \cdot \frac{-ie^{-1}}{2i \cdot 3} = -\frac{\pi}{3e} i \quad (3)$$

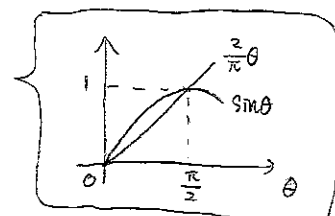
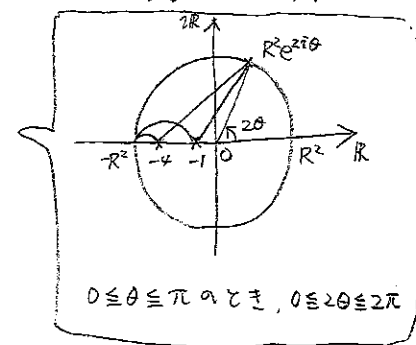
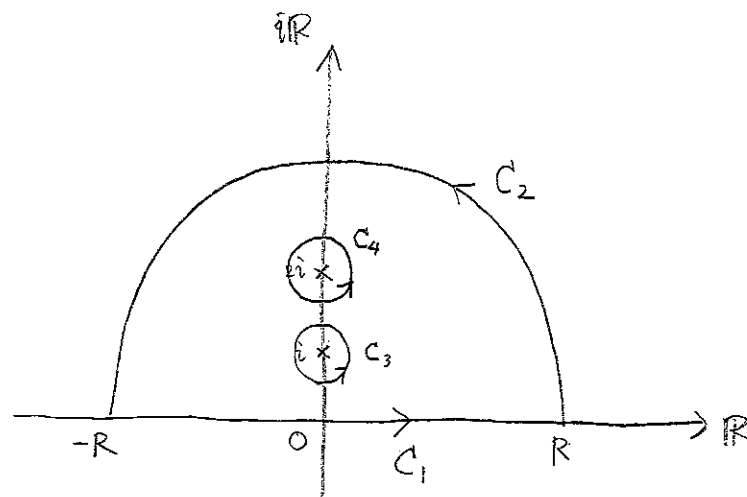
$$(iv) \int_{C_4} f = \int_{C_4} \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)} dz = 2\pi i \cdot \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)(z+2i)} \Big|_{z=2i} = 2\pi i \cdot \frac{-8ie^{-2}}{(-3) \cdot 4i} = \frac{4\pi}{3e^2} i \quad (3)$$

よって (i) ~ (iv) より, (*) で $R \rightarrow \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx + 0 = -\frac{\pi}{3e} i + \frac{4\pi}{3e^2} i$$

実部, 虚部 と比較して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{4\pi}{3e^2} - \frac{\pi}{3e} = \frac{(4-e)\pi}{3e^2}$$



7/11 - 2/11