

科目名	解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 24 年 6 月 28 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学 年		氏 名		
試験 時間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

0 まず、この試験を通して必要な定数 a, b, c を、あなたの学籍番号の各桁の 7 つの数字を用いて定めよう。最大の数字を a 、平均値の整数部分を b 、0 ~ 9 の中で使われていない数字の最も大きい数字を c とすると

$a = \boxed{}, \quad b = \boxed{}, \quad c = \boxed{}$

である。これ以降の問題中にある a, b, c はこの定数を用いて解答せよ。

1 以下において $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) とする。

(1) $u(x, y) = \frac{x^3 - x^2 + xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = \frac{-x^2y + 2xy - y^3}{x^2 + y^2}$

のとき、 f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ。
答のみでよいが、点や曲線がわかるように数値や式も記入すること。

(3) $u(x, y) = e^{-y}(x \cos x + b \cos x - y \sin x)$ のとき、 f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ。またそのときの f と f' を z で表せ。

(2) $u(x, y) = 2x^4 - 3ax^2 + 2ay^4 - 3ay^2, \quad v(x, y) = 2x^3y - 2axy^3$ のとき、 f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ。
答のみでよいが、点や曲線がわかるように数値や式も記入すること。

(4) f が領域 D で正則で $|f| = c$ のとき, f は D で定数であることを示せ.

$$(3) \cos 2z + (1 - 2a) \cos z + 1 - a = 0$$

2 (1) は値を求め, (2) と (3) は方程式をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

$$(1) \sin \left(\frac{\pi}{6} + bi \right)$$

$$(2) e^z = -c + ci$$

科目名		担当	先生
学籍番号	学部	学科	番
所属			

1

(1) $u, v: (0,0)$ で定義され、 $(0,0)$ 以外で C^∞ 級である。

また、 $(x,y) \neq (0,0) \dots \textcircled{1}$ のとき

$$u_x = \frac{x^4 + 2x^2y^2 - 4xy^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u_y = \frac{4x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$v_x = \frac{-2x^2y + 2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad v_y = \frac{-x^4 + 2x^3 - 2x^2y^2 - 2xy^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

よって、 $\textcircled{1}$ の下で、C-R 条件が成り立つ。

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2y^2 - 4xy^2 + y^4 = -x^4 + 2x^3 - 2x^2y^2 - 2xy^2 - y^4 \dots \textcircled{2} \\ 4x^2y = -(-2x^2y + 2y^3) \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

ここで x, y の条件を求めたい。

$$\textcircled{3} \text{ より } 2x^2y + 2y^3 = 0$$

$$2y(x^2 + y^2) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ より } y = 0$$

これを $\textcircled{2}$ に代入すると

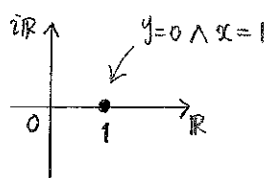
$$x^4 = -x^4 + 2x^3$$

$$2x^4 - 2x^3 = 0$$

$$2x^3(x-1) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ より } x \neq 0 \text{ より } x = 1$$

ゆえに、 f が微分可能である点全体は図の太線部。



(2) $u, v: \mathbb{R}^2$ で C^∞ 級だから、C-R 条件が成り立つ。

$$\begin{cases} 8x^3 - 6ax = 2x^3 - 6axy^2 \dots \textcircled{1} \\ 8ay^3 - 6ay = -(6x^2y - 2ay^3) \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

ここで x, y の条件を求めたい。

$$\textcircled{1} \text{ より } 6x^3 - 6ax + 6axy^2 = 0$$

$$6x(x^2 - a + ay^2) = 0$$

$$x = 0 \vee x^2 - a + ay^2 = 0$$

$$\therefore x = 0 \vee \frac{x^2}{a} + y^2 = 1$$

$$\textcircled{2} \text{ より } 6ay^3 - 6ay + 6x^2y = 0$$

$$6y(ay^2 - a + x^2) = 0$$

$$y = 0 \vee ay^2 - a + x^2 = 0$$

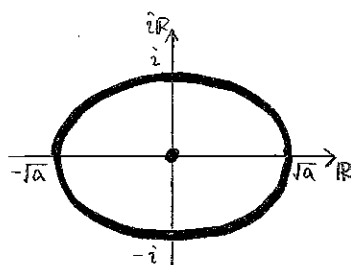
$$\therefore y = 0 \vee \frac{x^2}{a} + y^2 = 1$$

よって、 $\textcircled{1}$ か $\textcircled{2}$ より

$$(x,y) = (0,0) \vee \frac{x^2}{a} + y^2 = 1$$

ゆえに、 f が微分可能である点

全体は図の太線部



※ 15*****

0~9, 4桁で10進法

だから、 a, b, c はすべて

1桁の自然数になる。

特に $a \geq 5$

(3) u は $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級で、 z あり

$$u_x = e^{-y} \{1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x) - b \sin x - y \cos x\}$$

$$= e^{-y} (\cos x - x \sin x - b \sin x - y \cos x)$$

$$u_y = -e^{-y} \cdot (x \cos x + b \cos x - y \sin x) + e^{-y} \cdot (-\sin x)$$

$$= e^{-y} (-\sin x - x \cos x - b \cos x + y \sin x)$$

z あり。よって、C-R ($u_x = v_y, u_y = -v_x$) が成り立つ。

$$\begin{cases} v_x = e^{-y} (\sin x + x \cos x + b \cos x - y \sin x) \dots \textcircled{1} \\ v_y = e^{-y} (\cos x - x \sin x - b \sin x - y \cos x) \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

ここで v を求めたい。

$\textcircled{1}$ より

$$v = \int e^{-y} (\sin x + x \cos x + b \cos x - y \sin x) dx$$

$$= e^{-y} \{-\cos x + (x \sin x + \cos x) + b \sin x + y \cos x\} + \varphi(y)$$

$$= e^{-y} (x \sin x + b \sin x + y \cos x) + \varphi(y)$$

これを

$$v_y = -e^{-y} \cdot (x \sin x + b \sin x + y \cos x) + e^{-y} \cdot \cos x + \varphi'(y)$$

$$= e^{-y} (\cos x - x \sin x - b \sin x - y \cos x) + \varphi'(y)$$

これを $\textcircled{2}$ と比較すると

$$\varphi'(y) = 0 \quad \therefore \varphi(y) = C \text{ (定数)}$$

よって

$$v = e^{-y} (x \sin x + b \sin x + y \cos x) + C$$

また

$$f = u + iv$$

$$= e^{-y} (x \cos x + b \cos x - y \sin x)$$

$$+ i \{ e^{-y} (x \sin x + b \sin x + y \cos x) + C \}$$

$$= e^{-y} \{ x (\cos x + i \sin x) + b (\cos x + i \sin x) + i y (\cos x + i \sin x) \} + iC$$

$$= e^{-y} (\cos x + i \sin x) (x + b + iy) + iC$$

$$= e^{-y+ix} (x + iy + b) + iC$$

$$= e^{i(x+iy)} (x + iy + b) + iC$$

$$= (z + b) e^{iz} + iC$$

さらに

$$f' = 1 \cdot e^{iz} + (z + b) \cdot i e^{iz}$$

$$= (iz + 1 + ib) e^{iz}$$

(4) 例として

H25 前中, H26 前中

を見て下さい。

2

$$(1) \sin\left(\frac{\pi}{6} + bi\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} \cosh bi + \cos \frac{\pi}{6} \sinh bi$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \cosh b + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \sinh b$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^b + e^{-b}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \cdot \frac{e^b - e^{-b}}{2}$$

$$= \frac{1}{4} (e^b + \frac{1}{e^b}) + \frac{\sqrt{3}}{4} (e^b - \frac{1}{e^b}) i$$

$$(2) z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}) \text{ とすると}$$

$$e^z = -c + ci \quad (*)$$

$$e^x (\cos y + i \sin y) = \sqrt{2}c (\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi)$$

絶対値と偏角を比較すると

$$\begin{cases} e^x = \sqrt{2}c & \therefore x = \log(\sqrt{2}c) \\ y = \frac{3}{4}\pi + 2m\pi & (m \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

よって

$$z = \log(\sqrt{2}c) + i\left(\frac{3}{4}\pi + 2m\pi\right) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$(3) \cos 2z + (1-2a)\cos z + 1-a = 0$$

$$(2\cos^2 z - 1) + (1-2a)\cos z + 1-a = 0$$

$$2\cos^2 z + (1-2a)\cos z - a = 0$$

$$(\cos z - a)(2\cos z + 1) = 0$$

$$\therefore \cos z = a \quad \vee \quad \cos z = -\frac{1}{2}$$

$$(i) \cos z = a \quad (a \geq 5 \text{ に注意}) \text{ について}$$

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}) \text{ とすると}$$

$$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = a$$

$$\therefore \begin{cases} \cos x \cosh y = a & \dots \textcircled{1} \\ -\sin x \sinh y = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } \sin x = 0 \vee \sinh y = 0$$

$$(i-1) \sin x = 0 \text{ のとき, } x = m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \text{ より } \textcircled{1} \text{ より}$$

$$\cos m\pi \cosh y = a$$

$$(-1)^m \cosh y = a$$

$$\therefore \cosh y = (-1)^m a$$

$$\therefore \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq \sqrt{e^y e^{-y}} = 1 \text{ より } m = 2m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{よって, } \cosh y = a \text{ より}$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = a$$

$$(e^y)^2 - 2ae^y + 1 = 0$$

$$e^y = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

$$\therefore y = \log(a \pm \sqrt{a^2 - 1})$$

$$(i-2) \sinh y = 0 \text{ のとき, } y = 0 \text{ より } \textcircled{1} \text{ より}$$

$$\cos x \cosh 0 = a$$

$$\therefore \cos x = a$$

よってみたとき $x \in \mathbb{R}$ は存在しない。

$$(ii) \cos z = -\frac{1}{2} \text{ について}$$

さらに解いて

$$z = \pm \frac{2}{3}\pi + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

以上 (i), (ii) より

$$z = 2m\pi + i \log(a \pm \sqrt{a^2 - 1}) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

または

$$z = \pm \frac{2}{3}\pi + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

※ (ii) の「さらに解いて」が気になる人は...

$$(i) \text{ で } a = -\frac{1}{2} \text{ とすればいいから, } \textcircled{2} \text{ より}$$

$$\sin x = 0 \quad \vee \quad \sinh y = 0$$

$$\cdot \sin x = 0 \text{ のとき, } x = m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \text{ より } \textcircled{1} \text{ より}$$

$$\cosh y = (-1)^m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\cosh y \geq 1 \text{ より, みたす } y \in \mathbb{R} \text{ は存在しない。}$$

$$\cdot \sinh y = 0 \text{ のとき, } y = 0 \text{ より } \textcircled{1} \text{ より}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$\text{よって, } z = \pm \frac{2}{3}\pi + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \text{ となる。}$$

実数のときの結果と同じになる。

