

科目名	解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 25 年 11 月 21 日 (木) 3 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 予記のみ参照・持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません.

□ 次の積分を求めよ. ただし, 積分経路は正の向きとする.

(1) $\int_{|z|=5} \frac{3z-1}{(z-2)(z+7)^2} dz$

(2) $\int_{|z|=2} \frac{6z^2-1}{(2z-3)(3z+4)} dz$

(3) $\int_{|z|=4} \frac{z^2-z+1}{(z+2)(3z-1)^2} dz$

(4) $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^4(z+1)^2(z+2)} dz$

□2 $R > 0$ を十分大きくとる. $f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2 + 16)^2}$ と

$$C_1: z = x \quad (-R \leq x \leq R),$$

$$C_2: z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

$$C_3: |z - 4i| = 1 \quad (\text{正の向き})$$

を考えることにより, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 16)^2} dx$ を求めよ.

科目名	解析学	対象	20B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 25 年 11 月 21 日 (木) 3 回目 (~ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記の参考書持込可 (12)							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① 次の積分を求めよ。ただし、積分経路は正の向きとする。

(1) $\int_{|z|=5} \frac{3z-1}{(z-2)(z+7)^2} dz$ 1218^0

$$\frac{10}{81} \pi i \quad (3)$$

(2) $\int_{|z|=2} \frac{6z^2-1}{(2z-3)(3z+4)} dz$ $-\frac{6}{17} \pi i$

$$\frac{\pi}{3} i \quad (3)$$

(3) $\int_{|z|=4} \frac{z^2-z+1}{(z+2)(3z-1)^2} dz$ $-\frac{2}{7} \pi i$ 1211

$$\frac{2}{9} \pi i \quad (3)$$

$$2\pi i \cdot \frac{z^2-z+1}{(3z-1)^2} \Big|_{z=-2} = 2\pi i \cdot \frac{7}{7^2} = \frac{2}{7} \pi i$$

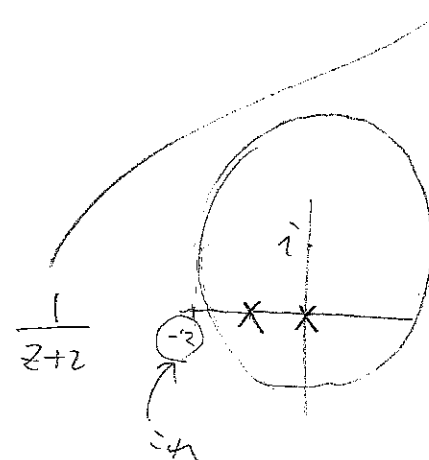
$$\begin{aligned} \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left\{ \frac{z^2-z+1}{9(z+2)} \right\}' \Big|_{z=\frac{1}{3}} &= \frac{2}{9} \pi i \cdot \left(z-3+\frac{7}{z+2} \right)' \Big|_{z=\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{9} \pi i \cdot \left\{ 1-\frac{7}{(z+2)^2} \right\}' \Big|_{z=\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{9} \pi i \left(1-\frac{9}{7} \right) \end{aligned}$$

(4) $\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^4(z+1)^2(z+2)} dz$

0 1211

$$-\frac{\pi}{8} i \quad (3)$$

部分分数が楽
 z^6 の係数 $\oplus z = -2/7 + 1/4$



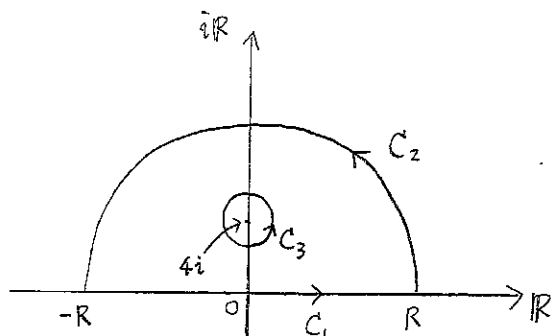
2 $R > 0$ を十分大きくとる. $f(z) = \frac{z^3 e^{iz}}{(z^2 + 16)^2}$ と

$$C_1: z = x \quad (-R \leq x \leq R),$$

$$C_2: z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

$$C_3: |z - 4i| = 1 \quad (\text{正の向き})$$

を考慮することにより, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 16)^2} dx$ を求めよ.



$f(z)$ は $z \neq \pm 4i$ で正則だから, Cauchy の積分定理より

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_3} f(z) dz \quad \dots (*) \quad (2)$$

(i) $C_1: z = x \quad (-R \leq x \leq R)$

よって

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{x^3 e^{ix}}{(x^2 + 16)^2} dx \\ &= \int_{-R}^R \frac{x^3 (\cos x + i \sin x)}{(x^2 + 16)^2} dx \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x + i x^3 \sin x}{(x^2 + 16)^2} dx \quad (1) \end{aligned}$$

(ii) $C_2: z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$

よって

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{R^3 e^{3i\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 16)^2} \cdot i R e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{i R^4 e^{4i\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 16)^2} e^{iR(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{i R^4 e^{i(4\theta + R\cos\theta)} e^{-R\sin\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 16)^2} d\theta \quad (2) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{i R^4 e^{i(4\theta + R\cos\theta)} e^{-R\sin\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 16)^2} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| \frac{i R^4 e^{i(4\theta + R\cos\theta)} e^{-R\sin\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 16)^2} \right| d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{R^4 e^{-R\sin\theta}}{|R^2 e^{2i\theta} + 16|^2} d\theta \quad (2) \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{R^4 e^{-R\sin\theta}}{(R^2 - 16)^2} d\theta \quad (2)$$

$$= \frac{R^4}{(R^2 - 16)^2} \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta$$

$$= \frac{R^4}{(R^2 - 16)^2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta \quad (1)$$

$$= \frac{2R^4}{(R^2 - 16)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

$$\leq \frac{2R^4}{(R^2 - 16)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \cdot \frac{2}{\pi} \theta} d\theta \quad (2)$$

$$= \frac{2R^4}{(R^2 - 16)^2} \left[-\frac{\pi}{2R} e^{-\frac{2R}{\pi} \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi R^3}{(R^2 - 16)^2} (e^{-R} - 1) \quad (1)$$

$$= \frac{\pi R^3}{(R^2 - 16)^2} (1 - e^{-R})$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (1)$$

$$\therefore \int_{C_2} f(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

(iii) Goursat の定理より

$$\begin{aligned} \int_{C_3} f(z) dz &= \int_{C_3} \frac{z^3 e^{iz}}{(z + 4i)^2} dz \\ &= \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left\{ \frac{z^3 e^{iz}}{(z + 4i)^2} \right\}' \Big|_{z=4i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{(3z^2 \cdot e^{iz} + z^3 \cdot i e^{iz}) \cdot (z + 4i)^2 - z^3 e^{iz} \cdot 2(z + 4i)}{(z + 4i)^4} \Big|_{z=4i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{z^2 e^{iz} \{ (3 + iz)(z + 4i) - 2z \}}{(z + 4i)^3} \Big|_{z=4i} \\ &= -\frac{\pi}{e^4} i \quad (4) \end{aligned}$$

以上 (i) ~ (iii) より, (*) で $R \rightarrow \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x + i x^3 \sin x}{(x^2 + 16)^2} dx + 0 = -\frac{\pi}{e^4} i$$

虚部を比較して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2 + 16)^2} dx = -\frac{\pi}{e^4}$$

