

科目名	解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 25 年 6 月 20 日 (木) 2 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

□1 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする。ただし、 $z = x + iy$ ($x,y \in \mathbb{R}$) で u,v は実数値とする。

(1) $u(x,y) = e^x(x \cos y - y \sin y - \cos y - \sin y)$ のとき、 f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ。またそのときの f と f' を z で表せ。

(2) $u(x, y) = 3x^3 - 4x^2 + 3xy^2 - 4y^2$, $v(x, y) = x^2y + y^3$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

2 方程式 $\cos z = 7$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

(3) f が領域 D で正則で $|f| = R$ (正の定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

(2) $u(x, y) = x^3 + xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - 4x^2 + 3y^3 - 4y^2$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

2 方程式 $\cos z = 8$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

(3) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$ (定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

(2) $u(x, y) = x^3 + xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - 4x^2 + 3y^3 - 4y^2$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

2 方程式 $\cos z = 7$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

(3) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$ (定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

(2) $u(x, y) = 3x^3 - 4x^2 + 3xy^2 - 4y^2$, $v(x, y) = x^2y + y^3$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

2 方程式 $\cos z = 8$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

(3) f が領域 D で正則で $|f| = R$ (正の定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

(2) $u(x, y) = 3x^3 - 4x^2 + 3xy^2 - 4y^2$, $v(x, y) = x^2y + y^3$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

2 方程式 $\cos z = 8$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

(3) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$ (定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

(2) $u(x, y) = x^3 + xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - 4x^2 + 3y^3 - 4y^2$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

2 方程式 $\cos z = 7$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

(3) f が領域 D で正則で $|f| = R$ (正の定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

(2) $u(x, y) = 3x^3 - 4x^2 + 3xy^2 - 4y^2$, $v(x, y) = x^2y + y^3$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

2 方程式 $\cos z = 7$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

(3) f が領域 D で正則で $\arg f = \theta$ (定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

(2) $u(x, y) = x^3 + xy^2$, $v(x, y) = 3x^2y - 4x^2 + 3y^3 - 4y^2$ のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

[2] 方程式 $\cos z = 8$ をみたす $z \in \mathbb{C}$ を求めよ.

(3) f が領域 D で正則で $|f| = R$ (正の定数) のとき, f は D で定数であることを示せ.

科目名		担当	先生
学籍番号 所属	学部	学科	番

--

1

$$(1) u = e^x (x \cos y - y \sin y - \cos y - \sin y) \quad (*)$$

$$u_x = e^x \cdot (x \cos y - y \sin y - \cos y - \sin y) + e^x \cdot \cos y \\ = e^x (x \cos y - y \sin y - \sin y)$$

$$u_y = e^x (-x \sin y - \sin y - y \cos y + \sin y - \cos y) \\ = e^x (-x \sin y - y \cos y - \cos y)$$

C-R 可成なり

$$\begin{cases} v_x = e^x (x \sin y + y \cos y + \cos y) \dots ① \\ v_y = e^x (x \cos y - y \sin y - \sin y) \dots ② \end{cases}$$

とみたす v を求めたい。

②より

$$v = \int v_y dy \\ = \int e^x (x \cos y - y \sin y - \sin y) dy \\ = e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y + \cos y) + \varphi(x)$$

このとき

$$v_x = e^x \cdot (x \sin y + y \cos y - \sin y + \cos y) + e^x \cdot \sin y + \varphi'(x) \\ = e^x (x \sin y + y \cos y + \cos y) + \varphi'(x)$$

これを①と比較して

$$\varphi'(x) = 0 \quad \therefore \varphi(x) = C \text{ (定数)}$$

よって

$$v = e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y + \cos y) + C$$

これを(*)より

$$f = e^x (x \cos y - y \sin y - \cos y - \sin y) \\ + i \{ e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y + \cos y) + C \} \\ = e^x \{ x (\cos y + i \sin y) + i y (\cos y + i \sin y) \\ - (\cos y + i \sin y) + i (\cos y + i \sin y) \} + iC \\ = e^x (\cos y + i \sin y) (x + iy - 1 + i) + iC \\ = (z - 1 + i) e^z + iC$$

また

$$f' = 1 \cdot e^z + (z - 1 + i) \cdot e^z \\ = (z + i) e^z$$

(2) (問1)

$$u = 3x^3 - 4x^2 + 3xy^2 - 4y^2, \quad v = x^2y + y^3$$

は $\mathbb{R}^2$ 上 C^∞ 級である。

$$u_x = 9x^2 - 8x + 3y^2, \quad u_y = 6xy - 8y$$

$$v_x = 2xy, \quad v_y = x^2 + 3y^2$$

よって, C-R 可成なり

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x + 3y^2 = x^2 + 3y^2 \dots ① \\ 6xy - 8y = -2xy \dots ② \end{cases}$$

とみたす x, y の条件を求めたい。

①より $8x^2 - 8x = 0$

$$8x(x-1) = 0 \quad \therefore x=0 \vee x=1$$

②より $8xy - 8y = 0$

$$8y(x-1) = 0 \quad \therefore y=0 \vee x=1$$

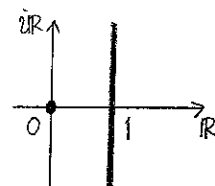
よって

$$(x=0 \wedge y=0) \vee x=1$$

$$\therefore (x, y) = (0, 0) \vee x=1$$

ゆえに, f が微分可能である点全体

は図の太線部分にたず。



(2) (問2)

$$u = x^3 + 2y^2, \quad v = 3x^2y - 4x^2 + 3y^3 - 4y^2$$

は $\mathbb{R}^2$ 上 C^∞ 級である。

$$u_x = 3x^2 + y^2, \quad u_y = 2xy$$

$$v_x = 6xy - 8x, \quad v_y = 3x^2 + 9y^2 - 8y$$

よって, C-R 可成なり

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 3x^2 + 9y^2 - 8y \dots ① \\ 2xy = -(6xy - 8x) \dots ② \end{cases}$$

とみたす x, y の条件を求めたい。

①より $8y^2 - 8y = 0$

$$8y(y-1) = 0 \quad \therefore y=0 \vee y=1$$

②より $8xy - 8x = 0$

$$8x(y-1) = 0 \quad \therefore x=0 \vee y=1$$

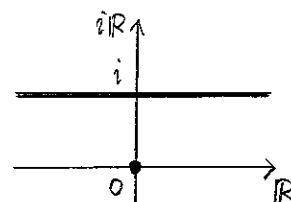
よって,

$$(y=0 \wedge x=0) \vee y=1$$

$$\therefore (x, y) = (0, 0) \vee y=1$$

ゆえに, f が微分可能である点全体

は図の太線部分にたず。



(3) (2) 1)

$|f| = R$ (正の定数) のとき

$$f = R(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (\theta: x, y \text{ の関数})$$

よって

$$u = R\cos\theta, \quad v = R\sin\theta$$

このとき

$$u_x = -R\sin\theta \cdot \theta_x, \quad u_y = -R\sin\theta \cdot \theta_y$$

$$v_x = R\cos\theta \cdot \theta_x, \quad v_y = R\cos\theta \cdot \theta_y$$

よって, C-R 条件

$$\begin{cases} -R\sin\theta \cdot \theta_x = R\cos\theta \cdot \theta_y \\ -R\sin\theta \cdot \theta_y = -R\cos\theta \cdot \theta_x \end{cases}$$

$R > 0$ より

$$\begin{cases} \sin\theta \cdot \theta_x + \cos\theta \cdot \theta_y = 0 \\ -\cos\theta \cdot \theta_x + \sin\theta \cdot \theta_y = 0 \end{cases}$$

行列表示して

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \neq 0$$

よって, 逆行列も存在するから

$$\begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \theta: \text{定数}$$

よって, f : 定数

※ 別証が H26 前・中 1 (2) にあります.

(3) (2) 2)

$\arg f = \theta$ (定数) のとき

$$f = R(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (R: x, y \text{ の関数})$$

よって

$$u = R\cos\theta, \quad v = R\sin\theta$$

このとき

$$u_x = R_x \cos\theta, \quad u_y = R_y \cos\theta$$

$$v_x = R_x \sin\theta, \quad v_y = R_y \sin\theta$$

よって, C-R 条件

$$\begin{cases} R_x \cos\theta = R_y \sin\theta \\ R_y \cos\theta = -R_x \sin\theta \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \cos\theta \cdot R_x - \sin\theta \cdot R_y = 0 \\ \sin\theta \cdot R_x + \cos\theta \cdot R_y = 0 \end{cases}$$

行列表示して

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$$

よって, 逆行列も存在するから

$$\begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore R: \text{定数}$$

よって, f : 定数

2 (2) 1)

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると $\cos z = 7$ より

$$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 7$$

$$\therefore \begin{cases} \cos x \cosh y = 7 & \dots ① \\ -\sin x \sinh y = 0 & \dots ② \end{cases}$$

② より $\sin x = 0 \vee \sinh y = 0$

(i) $\sin x = 0$ のとき, $x = m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) であるから ① より

$$\cos m\pi \cosh y = 7$$

$$(-1)^m \cosh y = 7$$

$$\therefore \cosh y = (-1)^m \cdot 7$$

よって $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq \sqrt{e^y e^{-y}} = 1$ であるから $m = 2m$ ($m \in \mathbb{Z}$)

である, このとき $\cosh y = 7$ より

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 7$$

$$(e^y)^2 - 14e^y + 1 = 0$$

$$e^y = 7 \pm 4\sqrt{3}$$

$$\therefore y = \log(7 \pm 4\sqrt{3})$$

(ii) $\sinh y = 0$ のとき, $y = 0$ であるから ① より

$$\cos x \cosh 0 = 7$$

$$\therefore \cos x = 7$$

これをみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しない.

以上 (i), (ii) より

$$z = 2m\pi + i \log(7 \pm 4\sqrt{3}) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

2 (2) 2)

$z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とすると $\cos z = 8$ より

$$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 8$$

$$\therefore \begin{cases} \cos x \cosh y = 8 & \dots ① \\ -\sin x \sinh y = 0 & \dots ② \end{cases}$$

② より $\sin x = 0 \vee \sinh y = 0$

(i) $\sin x = 0$ のとき, $x = m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$) であるから ① より

$$\cos m\pi \cosh y = 8$$

$$(-1)^m \cosh y = 8$$

$$\therefore \cosh y = (-1)^m \cdot 8$$

よって $\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \geq \sqrt{e^y e^{-y}} = 1$ であるから $m = 2m$ ($m \in \mathbb{Z}$)

である, このとき $\cosh y = 8$ より

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = 8$$

$$(e^y)^2 - 16e^y + 1 = 0$$

$$e^y = 8 \pm 3\sqrt{7}$$

$$\therefore y = \log(8 \pm 3\sqrt{7})$$

(ii) $\sinh y = 0$ のとき, $y = 0$ であるから ① より

$$\cos x \cosh 0 = 8$$

$$\therefore \cos x = 8$$

これをみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しない.

以上 (i), (ii) より

$$z = 2m\pi + i \log(8 \pm 3\sqrt{7}) \quad (m \in \mathbb{Z})$$