科目名	解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 25 年 8 月 1 日 (木) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験 時間	60 分	注意 事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

平成 25 年度前期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

(1) $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とする.

$$u(x,y) = \frac{x^4}{2} + \frac{y^4}{2} + x^2y^2 - x^3 - xy^2,\ v(x,y) = x^2y + y^3 - 4xy$$

のとき, f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ.

(2) $(-\sqrt{3} - i)^{3+2i}$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形にせよ.

(3) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + i\log 2\right)$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形にせよ.

$\boxed{2}$ 次の複素積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_C |z|^2 dz$ 　　$C : z = t^2 - it$ 　$(-1 \leqq t \leqq 2)$

(2) $\displaystyle\int_C \mathrm{Im} z dz$ 　　$C : z = t^2 - i\cos t$ 　$\left(0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$

(3) $\displaystyle\int_C \left(\mathrm{Re} z + \frac{i}{\mathrm{Im} z}\right) dz$ 　　$C : z = \log t + it$ 　$(1 \leqq t \leqq e)$

(4) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re} z dz$ 　　$C : z = \arctan t + 2it$ 　$(0 \leqq t \leqq 1)$

東京理科大学　　年　月　日　**試験答案**　　評点

科目名		担当	先生
所属 学籍番号	学部　学科　番	氏名	

1 (1) C-Rは

$$\begin{cases} 2x^3+2xy^2-3x^2-y^2 = x^2+3y^2-4x & —① \\ 2y^3+2x^2y-2xy = -(2xy-4y) & —② \end{cases}$$

①より　$2x^3+2xy^2-4x^2-4y^2+4x=0$

$\therefore x^3+xy^2-2x^2-2y^2+2x=0$ —③

②より　$2y^3+2x^2y-4y=0$

$2y(y^2+x^2-2)=0$　$\therefore y=0$ or $y^2=2-x^2$ —④

・$y=0$のとき、③より　$x^3-2x^2+2x=0$

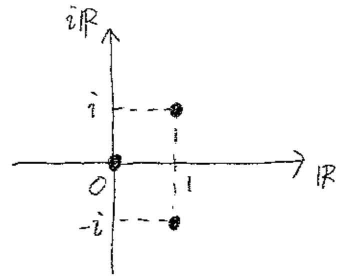
$x(x^2-2x+2)=0$　$x\in\mathbb{R}$より $x=0$

・④のとき、③より　$x^3+x(2-x^2)-2x^2-2(2-x^2)+2x=0$

$\cancel{x^3}+2x-\cancel{x^3}\cancel{-2x^2}-4+\cancel{2x^2}+2x=0$　$\therefore x=1$

④より　$y^2=1$　$\therefore y=\pm1$

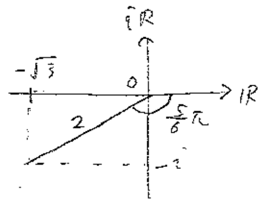
よって、求める点全体は



(2) $(3+2i)\log(-\sqrt{3}-i) = (3+2i)\{\log 2 + i(-\frac{5}{6}\pi+2n\pi)\}$

$= 3\log 2+\frac{5}{3}\pi-4n\pi+i(2\log 2-\frac{5}{2}\pi+6n\pi)$

$(n\in\mathbb{Z})$



だから

$(-\sqrt{3}-i)^{3+2i} = e^{3\log 2+\frac{5}{3}\pi-4n\pi+i(2\log 2-\frac{5}{2}\pi+6n\pi)}$

$= 8e^{\frac{5}{3}\pi-4n\pi}\{\cos(2\log 2-\frac{5}{2}\pi)+i\sin(2\log 2-\frac{5}{2}\pi)\}$　$(n\in\mathbb{Z})$

$\left(= 8e^{\frac{5}{3}\pi-4n\pi}\{\sin(2\log 2)-i\cos(2\log 2)\}\quad (n\in\mathbb{Z})\right)$

(3) $\tan(\frac{\pi}{4}+i\log 2) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan(i\log 2)}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan(i\log 2)} = \dfrac{1+i\tanh(\log 2)}{1-1\cdot i\tanh(\log 2)} = \dfrac{\cosh(\log 2)+i\sinh(\log 2)}{\cosh(\log 2)-i\sinh(\log 2)}$

$= \dfrac{\frac{e^{\log 2}+e^{-\log 2}}{2}+i\frac{e^{\log 2}-e^{-\log 2}}{2}}{\frac{e^{\log 2}+e^{-\log 2}}{2}-i\frac{e^{\log 2}-e^{-\log 2}}{2}} = \dfrac{(2+\frac{1}{2})+i(2-\frac{1}{2})}{(2+\frac{1}{2})-i(2-\frac{1}{2})} = \dfrac{5+3i}{5-3i} = \dfrac{(5+3i)^2}{25+9}$

$= \dfrac{25+30i-9}{34} = \dfrac{16+30i}{34} = \dfrac{8+15i}{17}$

$\cos(i\log 2) = \cosh(\log 2) = \dfrac{e^{\log 2}+e^{-\log 2}}{2} = \frac{1}{2}(2+\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}$　,　$\sin(i\log 2) = i\sinh(\log 2) = i\cdot\dfrac{e^{\log 2}-e^{-\log 2}}{2} = \frac{i}{2}(2-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}i$

だから　$\tan(i\log 2) = \dfrac{\sin(i\log 2)}{\cos(i\log 2)} = \frac{3}{5}i$

$\cos(\frac{\pi}{4}+i\log 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{5}{4}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{4} = \dfrac{5-3i}{4\sqrt{2}}$

$\sin(\frac{\pi}{4}+i\log 2) = \dfrac{5+3i}{4\sqrt{2}}$

2

(1) $\displaystyle\int_C |z|^2\,dz = \int_{-1}^{2}(t^4+t^2)\cdot(2t-i)\,dt = \int_{-1}^{2}\left\{(2t^5+2t^3)-i(t^4+t^2)\right\}dt$

$C: z = t^2 - it$
$(-1 \leqq t \leqq 2)$

$\displaystyle = \left[\left(\frac{t^6}{3}+\frac{t^4}{2}\right)-i\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)\right]_{-1}^{2} = \frac{1}{3}(64-1)+\frac{1}{2}(16-1) - i\left[\frac{1}{5}\{32-(-1)\}+\frac{1}{3}\{8-(-1)\}\right]$

$\displaystyle = 21 + \frac{15}{2} - i\left(\frac{33}{5}+3\right) = \frac{57}{2} - \frac{48}{5}i$

(2) $\displaystyle\int_C \mathrm{Im}\,z\,dz = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} -\cos t\cdot(2t+i\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{2}{3}\pi}(-2t\cos t - i\sin t\cos t)\,dt$

$C: z = t^2 - i\cos t$
$(0 \leqq t \leqq \frac{2}{3}\pi)$

$\displaystyle = \left[-2t\sin t - 2\cos t - \frac{i}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = -2\left(\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 0\cdot 0\right) - 2\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)-1\right\} - \frac{i}{2}\left(\frac{3}{4}-0\right)$

$\displaystyle = -\frac{2}{\sqrt{3}}\pi + 3 - \frac{3}{8}i$

(3) $\displaystyle\int_C \left(\mathrm{Re}\,z + \frac{i}{\mathrm{Im}\,z}\right)dz = \int_1^e \left(\log t + \frac{i}{t}\right)\cdot\left(\frac{1}{t}+i\right)dt = \int_1^e\left\{\left(\frac{\log t}{t}-\frac{1}{t}\right) + i\left(\log t + \frac{1}{t^2}\right)\right\}dt$

$C: z = \log t + it$
$1 \leqq t \leqq e$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}(\log t)^2 - \log t + i\left(t\log t - t - \frac{1}{t}\right)\right]_1^e$

$\displaystyle = \frac{1}{2}(1-0) - (1-0) + i\left\{(e\cdot 1 - 1\cdot 0) - (e-1) - \left(\frac{1}{e}-1\right)\right\}$

$\displaystyle = -\frac{1}{2} + \left(2-\frac{1}{e}\right)i$

(4) $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}\,z\,dz = \int_0^1 \arctan t\cdot\left(\frac{1}{1+t^2}+2i\right)dt$

$\begin{array}{ccc}\arctan t & & t\\ & \times & \\ \frac{1}{1+t^2} & & 1\end{array}$

$C: z = \arctan t + 2it$
$0 \leqq t \leqq 1$

$\displaystyle = \int_0^1\left(\frac{\arctan t}{1+t^2} + 2i\arctan t\right)dt$

$\displaystyle = \left[\frac{1}{2}(\arctan t)^2 + 2i\left\{t\arctan t - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right\}\right]_0^1$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16}-0\right) + 2i\left\{\left(1\cdot\frac{\pi}{4}-0\cdot 0\right) - \frac{1}{2}(\log 2 - 0)\right\}$

$\displaystyle = \frac{\pi^2}{32} + \left(\frac{\pi}{2} - \log 2\right)i$