

科目名	解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 26 年 11 月 27 日 (木) 3 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。表面に書ききれない場合は裏面を使ってください。

① $R > 0$ を十分大きくとる. $f(z) = \frac{z^3 e^{i\pi z}}{z^4 + 4}$ と

$C_1 : z = x \quad (-R \leq x \leq R),$

$C_2 : z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$

$C_3 : |z - (1 + i)| = \frac{1}{2} \quad (\text{正の向き}),$

$C_4 : |z - (-1 + i)| = \frac{1}{2} \quad (\text{正の向き})$

を考えるとにより, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin \pi x}{x^4 + 4} dx$ を求めよ.

科目名	解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 26 年 11 月 27 日 (木)	3 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	90 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記の参考資料 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。

★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。表面に書ききれない場合は裏面を使ってください。

① $R > 0$ を十分大きくとる. $f(z) = \frac{z^3 e^{i\pi z}}{z^4 + 4}$ と

$$C_1: z = x \quad (-R \leq x \leq R),$$

$$C_2: z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

$$C_3: |z - (1+i)| = \frac{1}{2} \quad (\text{正の向き}),$$

$$C_4: |z - (-1+i)| = \frac{1}{2} \quad (\text{正の向き})$$

を考慮することにより, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin \pi x}{x^4 + 4} dx$ を求めよ.

$f(z)$ は $z \neq \pm 1 \pm i$ (複号任意) で正則

だから, Cauchy の積分定理より

$$\int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz = \int_{C_3} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz \quad \dots (*)$$

(i) $C_1: z = x \quad (-R \leq x \leq R)$ だから

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_{-R}^R \frac{x^3 e^{i\pi x}}{x^4 + 4} dx \\ &= \int_{-R}^R \frac{x^3 (\cos \pi x + i \sin \pi x)}{x^4 + 4} dx \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos \pi x + i x^3 \sin \pi x}{x^4 + 4} dx \quad (R \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

(ii) $C_2: z = Re^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$ だから

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{R^3 e^{3i\theta} e^{i\pi R e^{i\theta}}}{R^4 e^{4i\theta} + 4} \cdot i R e^{i\theta} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{i R^4 e^{4i\theta} e^{i\pi R (\cos \theta + i \sin \theta)}}{R^4 e^{4i\theta} + 4} d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{i R^4 e^{i(4\theta + \pi R \cos \theta)} e^{-\pi R \sin \theta}}{R^4 e^{4i\theta} + 4} d\theta \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_2} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{i R^4 e^{i(4\theta + \pi R \cos \theta)} e^{-\pi R \sin \theta}}{R^4 e^{4i\theta} + 4} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi \left| \frac{i R^4 e^{i(4\theta + \pi R \cos \theta)} e^{-\pi R \sin \theta}}{R^4 e^{4i\theta} + 4} \right| d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{R^4 e^{-\pi R \sin \theta}}{|R^4 e^{4i\theta} + 4|} d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\pi \frac{R^4 e^{-\pi R \sin \theta}}{R^4 - 4} d\theta \\ &= \frac{R^4}{R^4 - 4} \int_0^\pi e^{-\pi R \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{R^4}{R^4 - 4} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{2 R^4}{R^4 - 4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R \sin \theta} d\theta \\ &\leq \frac{2 R^4}{R^4 - 4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\pi R \cdot \frac{2}{\pi} \theta} d\theta \\ &= \frac{2 R^4}{R^4 - 4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2 R \theta} d\theta \\ &= \frac{2 R^4}{R^4 - 4} \left[-\frac{1}{2 R} e^{-2 R \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{R^3}{R^4 - 4} (e^{-\pi R} - 1)$$

$$= \frac{R^3}{R^4 - 4} (1 - e^{-\pi R}) \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

$$\therefore \int_{C_2} f(z) dz \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

(iii) Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned} \int_{C_3} f(z) dz &= \int_{C_3} \frac{z^3 e^{i\pi z}}{(z+1+i)(z^2+2i)} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{z^3 e^{i\pi z}}{(z+1+i)(z^2+2i)} \Big|_{z=1+i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{2i(1+i) e^{i\pi - \pi}}{2(1+i) \cdot 4i} \\ &= -\frac{\pi}{2e^\pi} i \end{aligned}$$

(iv) Cauchy の積分公式より

$$\begin{aligned} \int_{C_4} f(z) dz &= \int_{C_4} \frac{z^3 e^{i\pi z}}{(z-1+i)(z^2-2i)} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{z^3 e^{i\pi z}}{(z-1+i)(z^2-2i)} \Big|_{z=-1+i} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{-2i(-1+i) e^{-i\pi - \pi}}{2(-1+i) \cdot (-4i)} \\ &= -\frac{\pi}{2e^\pi} i \end{aligned}$$

以上(i)~(iv)より, (*)より $R \rightarrow \infty$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos \pi x + i x^3 \sin \pi x}{x^4 + 4} dx + 0 = -\frac{\pi}{2e^\pi} i - \frac{\pi}{2e^\pi} i$$

虚部を比較して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin \pi x}{x^4 + 4} dx = -\frac{\pi}{e^\pi}$$

