科目名	解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 27 年 1 月 22 日 (木) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験時間	60 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

平成 26 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次の関数の $z=0$ を中心とする Laurent（ローラン）展開を与えられた範囲で求めよ． (10 点)

(1) $\dfrac{1}{z^3(z-2)^2}$ $(0<|z|<2)$ (2) $\dfrac{2z-7}{(z+1)(z-2)}$ $(1<|z|<2)$

$\boxed{2}$ 次の場合に，留数 $\mathrm{Res}[f,a]$ を求めよ． (25 点)

(1) $f(z)=\dfrac{2z-3}{(z+4)(z-1)^2}$, $a=-4$ (2) $f(z)=\dfrac{\sin(i\pi z)}{z(6z+i)(2z+i)}$, $a=-\dfrac{i}{6}$

(3) $f(z)=\dfrac{z^4+5z^2-3}{z(z-3)^3}$, $a=3$ (4) $f(z)=z^5\cos\dfrac{2}{z}$, $a=0$

(5) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{\tan z}$, $a=n\pi$ （ただし n は自然数とする）

$\boxed{3}$ 次の積分を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする． (40 点)

(1) $\displaystyle\int_{|z+3|=2}\frac{2z+5}{(z+3)(z-1)}dz$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=6}\frac{z^2-1}{(z+3)(z-4)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z-1|=2}\frac{1}{z(z-1)(z+2)}dz$ (4) $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{z}{(z^2+4)(z+5)}dz$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{(3z-1)(z+3)}dz$ (6) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{2z+3}{z(2z-5)(z-5)}dz$

(7) $\displaystyle\int_{|z|=5}\frac{3z^2-2z+1}{(z-1)(2z+1)^2}dz$ (8) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cosh z-e^{-2z}}{z^5}dz$

$\boxed{4}$ 次の積分を求めよ． (25 点)

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{17-15\cos\theta}d\theta$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x-1}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}dx$

東京理科大学　　年　月　日　**試験答案**　　評点

科目名		担当	先生
所属 学籍番号	学部　学科　番	氏名	H26後・定

1

(1) $0<|z|<2$ のとき $\left|\frac{z}{2}\right|<1$ だから

$$\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

微分して

$$-\frac{1}{(z-2)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{2^{n+1}}\quad\therefore\ \frac{1}{(z-2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{2^{n+1}}$$

$$\therefore\ \frac{1}{z^3(z-2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-4}}{2^{n+1}}\quad(0<|z|<2)$$

(2) $\dfrac{2z-7}{(z+1)(z-2)}=\dfrac{3}{z+1}-\dfrac{1}{z-2}$ である

$1<|z|<2$ のとき，(1) の過程より

$$-\frac{1}{z-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

また $\left|-\frac{1}{z}\right|<1$ だから

$$\frac{3}{z+1}=\frac{3}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z}\right)}=\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n}{z^{n+1}}$$

$$\therefore\ \frac{2z-7}{(z+1)(z-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\quad(1<|z|<2)$$

2

(1) $$\mathrm{Res}[f,a]=\lim_{z\to-4}(z+4)f(z)=\lim_{z\to-4}\frac{2z-3}{(z-1)^2}=-\frac{11}{25}$$

(2) $$\mathrm{Res}[f,a]=\lim_{z\to-\frac{i}{6}}\left(z+\frac{i}{6}\right)f(z)=\lim_{z\to-\frac{i}{6}}\frac{\sin(i\pi z)}{6z(2z+i)}=\frac{3}{4}$$

(3) $$\mathrm{Res}[f,a]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to3}\left\{(z-3)^3f(z)\right\}^{(2)}=\frac{1}{2}\lim_{z\to3}\left(\frac{z^4+5z^2-3}{z}\right)''$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{z\to3}\left(z^3+5z-3z^{-1}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to3}\left(6z-6z^{-3}\right)=\frac{80}{9}$$

(4) $z\neq0$ のとき

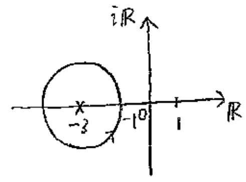
$$\cos\frac{2}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{2}{z}\right)^{2n}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{z^2}+\frac{1}{24}\cdot\frac{2^4}{z^4}-\frac{1}{720}\cdot\frac{2^6}{z^6}+\cdots$$
$$=1-\frac{2}{z^2}+\frac{2}{3z^4}-\frac{4}{45z^6}+\cdots$$

$$\therefore\ z^5\cos\frac{2}{z}=z^5-2z^3+\frac{2}{3}z-\frac{4}{45z}+\cdots$$

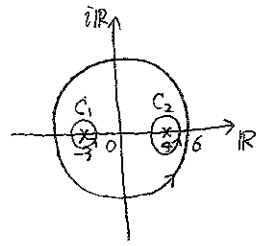
$$\therefore\ \mathrm{Res}[f,a]=-\frac{4}{45}$$

(5) $$\mathrm{Res}[f,a]=\left.\frac{e^{iz}}{(\tan z)'}\right|_{z=n\pi}=\left.\frac{e^{iz}}{\frac{1}{\cos^2z}}\right|_{z=n\pi}=\left.e^{iz}\cos^2z\right|_{z=n\pi}$$
$$=e^{in\pi}\cdot(-1)^2=(-1)^n$$

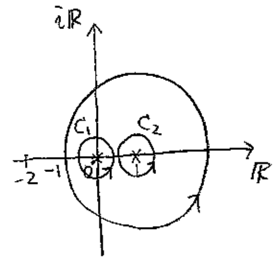
3



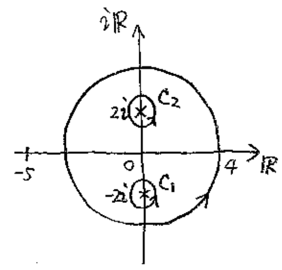
(1) $$\int_{|z+3|=2}\frac{2z+5}{(z+3)(z-1)}dz$$
$$=\int_{|z+3|=2}\frac{\frac{2z+5}{z-1}}{z+3}dz$$
$$=2\pi i\cdot\left.\frac{2z+5}{z-1}\right|_{z=-3}=\frac{\pi}{2}i$$



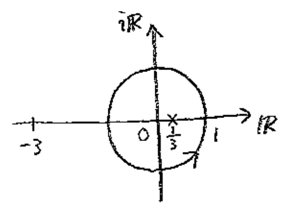
(2) $$\int_{|z|=6}\frac{z^2-1}{(z+3)(z-4)}dz$$
$$=\int_{C_1}\frac{\frac{z^2-1}{z-4}}{z+3}dz+\int_{C_2}\frac{\frac{z^2-1}{z+3}}{z-4}dz$$
$$=2\pi i\cdot\left(\left.\frac{z^2-1}{z-4}\right|_{z=-3}+\left.\frac{z^2-1}{z+3}\right|_{z=4}\right)$$
$$=2\pi i\left(-\frac{8}{7}+\frac{15}{7}\right)=2\pi i$$



(3) $$\int_{|z-1|=2}\frac{1}{z(z-1)(z+2)}dz$$
$$=\int_{C_1}\frac{\frac{1}{(z-1)(z+2)}}{z}dz+\int_{C_2}\frac{\frac{1}{z(z+2)}}{z-1}dz$$
$$=2\pi i\cdot\left\{\left.\frac{1}{(z-1)(z+2)}\right|_{z=0}+\left.\frac{1}{z(z+2)}\right|_{z=1}\right\}$$
$$=2\pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}i$$

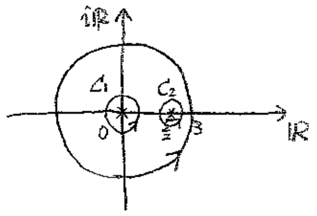


(4) $$\int_{|z|=4}\frac{z}{(z^2+4)(z+5)}dz$$
$$=\int_{C_1}\frac{\frac{z}{(z-2i)(z+5)}}{z+2i}dz+\int_{C_2}\frac{\frac{z}{(z+2i)(z+5)}}{z-2i}dz$$
$$=2\pi i\cdot\left\{\left.\frac{z}{(z-2i)(z+5)}\right|_{z=-2i}+\left.\frac{z}{(z+2i)(z+5)}\right|_{z=2i}\right\}$$
$$=2\pi i\left\{\frac{-2i}{-4i(5-2i)}+\frac{2i}{4i(5+2i)}\right\}=2\pi i\left\{\frac{1}{2(5-2i)}+\frac{1}{2(5+2i)}\right\}$$
$$=\pi i\cdot\frac{(5+2i)+(5-2i)}{25+4}=\frac{10}{29}\pi i$$



(5) $$\int_{|z|=1}\frac{z^2+1}{(3z-1)(z+3)}dz$$
$$=\int_{|z|=1}\frac{\frac{z^2+1}{3(z+3)}}{z-\frac{1}{3}}dz$$
$$=2\pi i\cdot\left.\frac{z^2+1}{3z+9}\right|_{z=\frac{1}{3}}=\frac{2}{9}\pi i$$

(6) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{2z+3}{z(2z-5)(z-5)}\,dz$

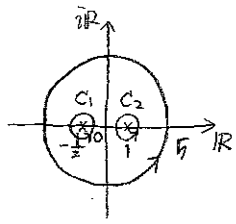


$$= \int_{C_1} \frac{\frac{2z+3}{(2z-5)(z-5)}}{z}\,dz + \int_{C_2} \frac{\frac{2z+3}{2z(z-5)}}{z-\frac{5}{2}}\,dz$$

$$= 2\pi i \cdot \left\{ \frac{2z+3}{(2z-5)(z-5)}\bigg|_{z=0} + \frac{2z+3}{2z(z-5)}\bigg|_{z=\frac{5}{2}} \right\}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{3}{25} - \frac{16}{25} \right) = -\frac{26}{25}\pi i$$

(7) $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{3z^2-2z+1}{(z-1)(2z+1)^2}\,dz$



$$= \int_{C_1} \frac{\frac{3z^2-2z+1}{4(z-1)}}{(z+\frac{1}{2})^2}\,dz + \int_{C_2} \frac{\frac{3z^2-2z+1}{(2z+1)^2}}{z-1}\,dz$$

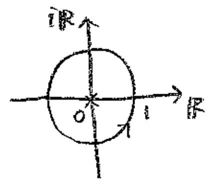
$$= \frac{2\pi i}{1!}\left\{ \frac{3z^2-2z+1}{4(z-1)} \right\}'\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} + 2\pi i \cdot \frac{3z^2-2z+1}{(2z+1)^2}\bigg|_{z=1}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{1}{4}\left(3z+1+\frac{2}{z-1}\right) \right\}'\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} + 2\pi i \cdot \frac{2}{9}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left\{ 3 - \frac{2}{(z-1)^2} \right\}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} + 2\pi i \cdot \frac{2}{9}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{1}{4}\left(3-\frac{8}{9}\right) + \frac{2}{9} \right\} = \frac{3}{2}\pi i$$

(8) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\cosh z - e^{-2z}}{z^5}\,dz$



$$= \frac{2\pi i}{4!} \cdot \left(\cosh z - e^{-2z}\right)^{(4)}$$

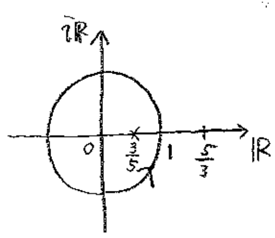
$$= \frac{\pi i}{12}\left\{ \cosh z - (-2)^4 e^{-2z} \right\}\bigg|_{z=0} = \frac{\pi i}{12}(1-16) = -\frac{5}{4}\pi i$$

$\boxed{4}$

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{17-15\cos\theta}\,d\theta$

$$= \int_{|z|=1} \frac{1}{17-15\cdot\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \cdot \frac{1}{iz}\,dz$$

$$= \frac{-1}{i}\int_{|z|=1} \frac{2}{15z^2-34z+15}\,dz$$



$$= \frac{-1}{i}\int_{|z|=1} \frac{2}{(5z-3)(3z-5)}\,dz$$

$$= \frac{-1}{i}\int_{|z|=1} \frac{\frac{2}{5(3z-5)}}{z-\frac{3}{5}}\,dz$$

$$= \frac{-1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{2}{5(3z-5)}\bigg|_{z=\frac{3}{5}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

(2) $(z^2+1)(z^2-2z+5)=0$ の解は

$$z = \pm i,\ 1 \pm 2i$$

で，これらのうち上半平面にあるのは

$$z = i,\ 1+2i$$

また

$\left((z^2+1)(z^2-2z+5)\text{の次数} \right) - \left(2z-1\text{の次数} \right) = 3 > 2$

だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-1}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}\,dx$$

$$= 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(\frac{2z-1}{(z^2+1)(z^2-2z+5)},\ i \right) + \mathrm{Res}\left(\frac{2z-1}{(z^2+1)(z^2-2z+5)},\ 1+2i \right) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{2z-1}{(z+i)(z^2-2z+5)}\bigg|_{z=i} + \frac{2z-1}{(z^2+1)(z-1+2i)}\bigg|_{z=1+2i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{-1+2i}{2i(4-2i)} + \frac{1+4i}{(-2+4i)\cdot 4i} \right\}$$

$$= \pi \left(\frac{-1+2i}{4-2i} + \frac{1+4i}{-4+8i} \right)$$

$$= \pi \left\{ \frac{(-1+2i)(4+2i)}{16+4} + \frac{(1+4i)(-4-8i)}{16+64} \right\}$$

$$= \pi \left(\frac{-4-2i+8i-4}{20} + \frac{-4-8i-16i+32}{80} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{-8+6i}{20} + \frac{7-6i}{20} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{20}$$