科目名	解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 26 年 6 月 5 日 (木) 2 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名	
試験 時間	90 分	注意 事項	1 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評 点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする．

(1) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y + 2\sin y)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

(2) f が領域 D で正則で $|f| = R$（正の定数）のとき，f は D で定数であることを示せ．

(3) $u(x,y)=x^3-y^3-2x^2+y^2-3x$, $v(x,y)=x^2y+xy^2-3y^2+3y$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

$\boxed{2}$ (1) $\cos(\alpha+i\log 4)$ を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をみたすものとする．

(2) 方程式 $\sin z=5$ をみたす $z\in\mathbb{C}$ を求めよ．

科目名	解析学	対象	2OB	学部研究科	理学部第一部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 26 年 6 月 5 日 (木) 2 回目 (〜 時限目)		担当	石川 学			学年		氏名		
試験時間	90 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする．

(1) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y + 2\sin y)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

u は $\mathbb{R}^2$ で C^∞級であり

$$u_x = e^x\cdot(x\cos y - y\sin y + 2\sin y) + e^x\cdot\cos y$$
$$= e^x(x\cos y - y\sin y + 2\sin y + \cos y)$$
$$u_y = e^x\{-x\sin y - (1\cdot\sin y + y\cdot\cos y) + 2\cos y\}$$
$$= e^x(-x\sin y - y\cos y + 2\cos y - \sin y)$$

である．よって，C-R ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) すなわち

$$\begin{cases} v_x = e^x(x\sin y + y\cos y - 2\cos y + \sin y) & \cdots ① \\ v_y = e^x(x\cos y - y\sin y + 2\sin y + \cos y) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす v を求めればよい．

②より

$$v = \int e^x(x\cos y - y\sin y + 2\sin y + \cos y)\,dy$$
$$= e^x\{x\sin y - (-y\cos y + \sin y) - 2\cos y + \sin y\} + \varphi(x)$$
$$= e^x(x\sin y + y\cos y - 2\cos y) + \varphi(x)$$

このとき

$$v_x = e^x\cdot(x\sin y + y\cos y - 2\cos y) + e^x\cdot\sin y + \varphi'(x)$$
$$= e^x(x\sin y + y\cos y - 2\cos y + \sin y) + \varphi'(x)$$

これと①を比較すると

$$\varphi'(x) = 0 \qquad \therefore \varphi(x) = C \text{ (定数)}$$

よって

$$v = e^x(x\sin y + y\cos y - 2\cos y) + C$$

(C：定数)

また

$$f = e^x(x\cos y - y\sin y + 2\sin y) + i\{e^x(x\sin y + y\cos y - 2\cos y) + C\}$$
$$= e^x\{x(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + i\sin y) - 2i(\cos y + i\sin y)\} + iC$$
$$= e^x(\cos y + i\sin y)(x + iy - 2i) + iC$$
$$= (z - 2i)e^z + iC$$

さらに

$$f' = 1\cdot e^z + (z-2i)\cdot e^z = (z+1-2i)e^z$$

(2) f が領域 D で正則で $|f| = R$（正の定数）のとき，f は D で定数であることを示せ．

$|f| = R$ (正の定数) より

$$u^2 + v^2 = R^2 \quad \cdots ①$$

①の両辺を x で偏微分して

$$2u\cdot u_x + 2v\cdot v_x = 0$$
$$\therefore uu_x + vv_x = 0 \quad \cdots ②$$

同様に $uu_y + vv_y = 0$ であるが，C-R より

$$uv_x - vu_x = 0 \quad \cdots ③$$

②，③を u_x, v_x の連立方程式とみて行列表現すると

$$\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで，①より

$$\begin{vmatrix} u & v \\ -v & u \end{vmatrix} = u^2 + v^2 = R^2 \neq 0$$

であるから

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore f' = u_x + iv_x = 0$$

よって，f は D で定数である．

(3) $u(x,y)=x^3-y^3-2x^2+y^2-3x$, $v(x,y)=x^2y+xy^2-3y^2+3y$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

$u, v : \mathbb{R}^2$ で C^∞ 級だから，C-R すなわち

$$\begin{cases} 3x^2-4x-3 = x^2+2xy-6y+3 & \cdots ① \\ -3y^2+2y = -(2xy+y^2) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす x, y の条件を求めればよい．

①より

$$2x^2-2xy-4x+6y-6=0$$
$$x^2-(y+2)x+3(y-1)=0$$
$$(x-3)(x-y+1)=0$$
$$\therefore\ x=3 \text{ or } y=x+1$$

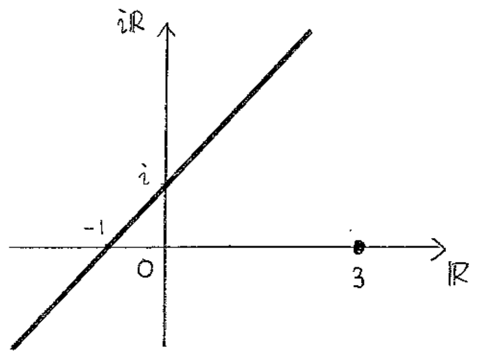
②より

$$2y^2-2xy-2y=0$$
$$2y(y-x-1)=0$$
$$\therefore\ y=0 \text{ or } y=x+1$$

よって，① かつ ② より

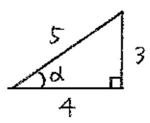
$$(x,y)=(3,0) \text{ or } y=x+1$$

ゆえに，f が微分可能である点全体は図の太線部



$\boxed{2}$ (1) $\cos(\alpha+i\log 4)$ を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をみたすものとする．

$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$



$$\cosh(\log 4) = \frac{e^{\log 4}+e^{-\log 4}}{2} = \frac{4+\frac{1}{4}}{2} = \frac{17}{8}$$

$$\sinh(\log 4) = \frac{e^{\log 4}-e^{-\log 4}}{2} = \frac{4-\frac{1}{4}}{2} = \frac{15}{8}$$

だから

$$\cos(\alpha+i\log 4) = \cos\alpha\cosh(\log 4) - i\sin\alpha\sinh(\log 4)$$
$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{17}{8} - i\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{8}$$
$$= \frac{17}{10} - \frac{9}{8}i$$
$$\left(= \frac{68-45i}{40}\right)$$

(2) 方程式 $\sin z=5$ をみたす $z\in\mathbb{C}$ を求めよ．

$z = x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ とすると，$\sin z = 5$ より

$$\sin(x+iy)=5$$
$$\sin x\cosh y + i\cos x\sinh y = 5$$

$$\therefore \begin{cases} \sin x\cosh y = 5 & \cdots ① \\ \cos x\sinh y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

②より $\cos x = 0$ または $\sinh y = 0$

(i) $\cos x = 0$ のとき

$$x = \frac{\pi}{2}+n\pi \quad (n\in\mathbb{Z})$$

このとき，①より

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)\cosh y = 5$$
$$(-1)^n\cosh y = 5$$
$$\therefore\ \cosh y = (-1)^n\cdot 5$$

ここで，$\cosh y = \dfrac{e^y+e^{-y}}{2} \geqq \sqrt{e^y e^{-y}} = 1$ だから

$$n = 2m \quad (m\in\mathbb{Z})$$

であり，このとき，$\cosh y = 5$ より

$$\frac{e^y+e^{-y}}{2} = 5$$
$$(e^y)^2-10e^y+1=0$$
$$e^y = 5\pm 2\sqrt{6}$$
$$\therefore\ y = \log(5\pm 2\sqrt{6})$$

(ii) $\sinh y = 0$ のとき

$$\frac{e^y-e^{-y}}{2} = 0$$
$$e^y = e^{-y}$$
$$\therefore\ y=0$$

このとき，①より $\sin x = 5$

これをみたす $x\in\mathbb{R}$ は存在しない

以上(i)，(ii)より

$$z = \frac{\pi}{2}+2m\pi + i\log(5\pm 2\sqrt{6}) \quad (m\in\mathbb{Z})$$