

科目名	解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評 点
平成 28 年 1 月 21 日 (木)	3 回目 (~ 時限目)	担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	60 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照・持込可 ()							

平成 27 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

[1] $\frac{1}{z^4(z+3)^2}$ の $z=0$ を中心とする Laurent 展開を $0 < |z| < 3$ の範囲で求めよ. (5 点)

[2] 次の場合に, 留数 $\text{Res}[f, a]$ を求めよ. (20 点)

(1) $f(z) = \frac{5z-7}{(z+2)(z-2)^3}, a = -2$ (2) $f(z) = \frac{\cos(i\pi z)}{z(3z+i)(2z-i)}, a = -\frac{i}{3}$

(3) $f(z) = \frac{z^4-3z+5}{z^2(z-2)^4}, a = 2$ (4) $f(z) = z^4 \sin \frac{4}{z}, a = 0$

[3] 次の積分を求めよ. ただし, 積分経路は正の向きとする. (30 点)

(1) $\int_{|z-4|=2} \frac{2z-3}{(z-4)(z-1)} dz$ (2) $\int_{|z-3|=4} \frac{1}{z(z-1)(z+2)(z-3)} dz$

(3) $\int_{|z|=5} \frac{z}{(z^2+4)(z+7)} dz$ (4) $\int_{|z|=1} \frac{z^2-1}{(5z-1)(z+3)} dz$

(5) $\int_{|z|=1} \frac{5z+7}{z(4z+3)(z-2)} dz$ (6) $\int_{|z|=3} \frac{\cosh z}{z^4 e^z} dz$

[4] 次の積分を求めよ. (45 点)

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{29-20\cos\theta} d\theta$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+3}{(x^2+1)(x^2-2x+5)} dx$

(3) $\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+9} dx$ (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx$

科目名					担当先生
該○ 当○ 学○ 部○ を○ む○	理学部	1	部	学科	年
	工学部	2	部	学科	年
			番		
			名		

1

$0 < |z| < 3$ のとき $0 < \left| -\frac{z}{3} \right| < 1$ であるから

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}$$

z で微分して

$$-\frac{1}{(z+3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^n}{3^{n+1}} z^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{(z+3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n+1}}{3^{n+1}} z^{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{z^4(z+3)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n+1}}{3^{n+1}} z^{n-5} \quad (0 < |z| < 3)$$

2

$$(1) \operatorname{Res}[f, a] = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)f(z) = \lim_{z \rightarrow -2} \frac{5z-7}{(z-2)^3} = \frac{17}{64}$$

$$(2) \operatorname{Res}[f, a] = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} (z+\frac{1}{3})f(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{\cos(i\pi z)}{3z(2z-i)} = -\frac{3}{10}$$

$$(3) \operatorname{Res}[f, a] = \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 2} \{(z-2)^4 f(z)\}^{(3)} = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 2} \left(\frac{z^4 - 3z + 5}{z^2} \right)^{(3)}$$

$$= \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 2} (z^2 - 3z^{-1} + 5z^{-2})^{(3)} = \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 2} (18z^{-4} - 120z^{-5})$$

$$= -\frac{7}{16}$$

(4) $z \neq 0$ のとき

$$\sin \frac{4}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{4}{z}\right)^{2n+1}$$

$$= \frac{4}{z} - \frac{1}{6} \left(\frac{4}{z}\right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{4}{z}\right)^5 - \dots$$

$$= \frac{4}{z} - \frac{32}{3z^3} + \frac{128}{15z^5} - \dots$$

よって

$$z^4 \sin \frac{4}{z} = 4z^3 - \frac{32}{3}z + \frac{128}{15z} - \dots \quad (0 < |z| < \infty)$$

$$\therefore \operatorname{Res}[f, a] = \frac{128}{15}$$

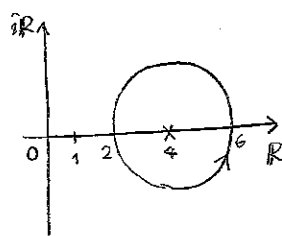
3

$$(1) \int_{|z-4|=2} \frac{2z-3}{(z-4)(z-1)} dz$$

$$= \int_{|z-4|=2} \frac{2z-3}{z-4} dz$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{2z-3}{z-1} \Big|_{z=4}$$

$$= \frac{10}{3} \pi i$$



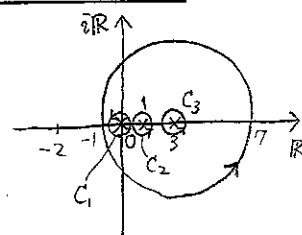
$$(2) \int_{|z-3|=4} \frac{1}{z(z-1)(z+2)(z-3)} dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{1}{(z-1)(z+2)(z-3)} dz + \int_{C_2} \frac{1}{z(z+2)(z-3)} dz$$

$$+ \int_{C_3} \frac{1}{z(z-1)(z+2)} dz$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{1}{(z-1)(z+2)(z-3)} \Big|_{z=0} + \frac{1}{z(z+2)(z-3)} \Big|_{z=1} + \frac{1}{z(z-1)(z+2)} \Big|_{z=3} \right\}$$

$$= \frac{\pi}{15} i$$

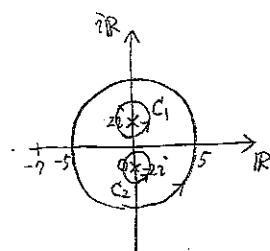


$$(3) \int_{|z|=5} \frac{z}{(z^2+4)(z+7)} dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{z}{(z+2i)(z+7)} dz + \int_{C_2} \frac{z}{(z-2i)(z+7)} dz$$

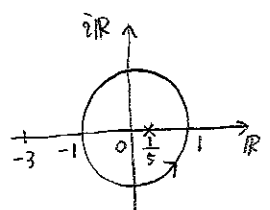
$$= 2\pi i \left\{ \frac{z}{(z+2i)(z+7)} \Big|_{z=2i} + \frac{z}{(z-2i)(z+7)} \Big|_{z=-2i} \right\}$$

$$= \frac{14}{53} \pi i$$



$$(4) \int_{|z|=1} \frac{z^2-1}{(5z-1)(z+3)} dz$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{z^2-1}{5(z+\frac{1}{5})(z+3)} dz = 2\pi i \cdot \frac{z^2-1}{5(z+3)} \Big|_{z=\frac{1}{5}} = -\frac{3}{25} \pi i$$

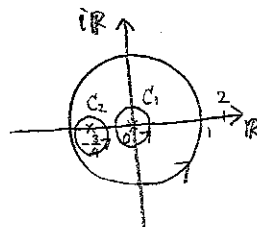


$$(5) \int_{|z|=1} \frac{5z+7}{z(4z+3)(z-2)} dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{5z+7}{(4z+3)(z-2)} dz + \int_{C_2} \frac{5z+7}{4z(z-2)} dz$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{5z+7}{(4z+3)(z-2)} \Big|_{z=0} + \frac{5z+7}{4z(z-2)} \Big|_{z=-3/4} \right\}$$

$$= -\frac{17}{11} \pi i$$



$$(6) \int_{|z|=3} \frac{\cosh z}{z^4 e^z} dz$$

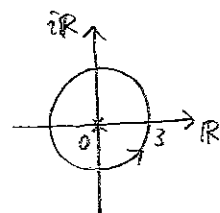
$$= \int_{|z|=3} \frac{e^{-z} \cosh z}{z^4} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{3!} \cdot (e^{-z} \cosh z)^{(3)} \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{\pi i}{3} \left\{ \sum_{k=0}^3 C_k (e^{-z})^{(3-k)} (\cosh z)^{(k)} \right\} \Big|_{z=0}$$

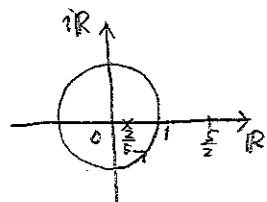
$$= \frac{\pi i}{3} \{ 1 \cdot (-e^{-z}) \cdot \cosh z + 3 \cdot e^{-z} \cdot \sinh z + 3 \cdot (-e^{-z}) \cdot \cosh z + 1 \cdot e^{-z} \cdot \sinh z \} \Big|_{z=0}$$

$$= -\frac{4}{3} \pi i$$

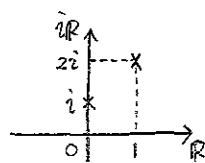


4

$$\begin{aligned}
 (1) \int_0^{2\pi} \frac{1}{29-20\cos\theta} d\theta \\
 = \int_{|z|=1} \frac{1}{29-20\cdot\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} \cdot \frac{1}{iz} dz \\
 = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{-1}{10z^2-29z+10} dz \\
 = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{-1}{(5z-2)(2z-5)} dz \\
 = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{\frac{-1}{5(2z-5)}}{z-\frac{2}{5}} dz \\
 = \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \cdot \frac{-1}{5(2z-5)} \Big|_{z=\frac{2}{5}} \\
 = \frac{2}{21}\pi
 \end{aligned}$$

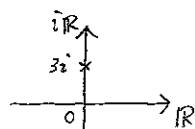


(2) (分母の次数) - (分子の次数) = 3 > 2
 ∴ 分母 = 0 は実数解をもたない。
 また、分母 = 0 の解のうち上半平面にあるのは
 $i, 1+2i$ だから



$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+3}{(x^2+1)(x^2-2x+5)} dx \\
 = 2\pi i \left\{ \text{Res}\left[\frac{2z+3}{(z^2+1)(z^2-2z+5)}, i\right] + \text{Res}\left[\frac{2z+3}{(z^2+1)(z^2-2z+5)}, 1+2i\right] \right\} \\
 = 2\pi i \left\{ \frac{2z+3}{(z+i)(z^2-2z+5)} \Big|_{z=i} + \frac{2z+3}{(z^2+1)(z-1+2i)} \Big|_{z=1+2i} \right\} \\
 = 2\pi i \left\{ \frac{3+2i}{2i \cdot 2(2-i)} + \frac{5+4i}{2(-1+2i) \cdot 4i} \right\} \\
 = \pi \left\{ \frac{3+2i}{2(2-i)} + \frac{5+4i}{4(-1+2i)} \right\} \\
 = \pi \left\{ \frac{(3+2i)(2+i)}{2(4+1)} + \frac{(5+4i)(-1-2i)}{4(1+4)} \right\} \\
 = \pi \left(\frac{4+7i}{10} + \frac{3-14i}{20} \right) \\
 = \frac{11}{20}\pi
 \end{aligned}$$

(3) $\deg(x^2+9) - \deg(1) = 2$
 ∴ $x^2+9=0$ は実数解をもたない。
 また、 $x^2+9=0$ の解のうち上半平面にある
 のは $3i$
 さらに、 $\frac{1}{x^2+9}$ は偶関数だから



$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+9} dx + i\pi \int_0^{\pi} \frac{1}{x^2+9} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}\left[\frac{\log z}{z^2+9}, 3i\right] \\
 \text{か成り立つ。} \therefore \\
 2\pi i \cdot \text{Res}\left[\frac{\log z}{z^2+9}, 3i\right] = 2\pi i \cdot \frac{\log z}{z+3i} \Big|_{z=3i}
 \end{aligned}$$

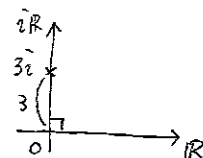
$$= 2\pi i \cdot \frac{\log(3i)}{6i}$$

$$= \frac{\pi}{3} (\log 3 + \frac{\pi}{2} i)$$

だから、(*) の実部を比較すれば

$$2 \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{3} \log 3$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+9} dx = \frac{\pi}{6} \log 3$$



$$(4) \deg(x^2+1)^2 - \deg(x^3) = 1$$

∴ $(x^2+1)^2=0$ は実数解をもたない。

また、 $(x^2+1)^2=0$ の解のうち上半平面にある
 のは i だから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx = 2\pi i \cdot \text{Res}\left[\frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2}, i\right] \quad \dots (*)$$

∴

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{(x^2+1)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \cos x}{(x^2+1)^2} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx$$

また

$$\begin{aligned}
 2\pi i \cdot \text{Res}\left[\frac{z^3 e^{iz}}{(z^2+1)^2}, i\right] \\
 = 2\pi i \cdot \frac{1}{1!} \left\{ \frac{z^3 e^{iz}}{(z+i)^2} \right\}' \Big|_{z=i} \\
 = 2\pi i \cdot \frac{(3z^2 e^{iz} + z^3 \cdot i e^{iz}) \cdot (z+i)^2 - z^3 e^{iz} \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} \Big|_{z=i} \\
 = 2\pi i \cdot \frac{\{(-3) \cdot e^{-1} + (-i) \cdot i e^{-1}\} \cdot (-4) - (-i) \cdot e^{-1} \cdot 4i}{16} \\
 = \frac{\pi}{2e} i
 \end{aligned}$$

よって、(*) で虚部を比較すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{2e}$$