科目名	解析学	対象	2OB	学部研究科	理学部第一部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 27 年 6 月 18 日 (木) 3 回目 (〜 時限目)		担当	石川 学			学年		氏名		
試験時間	90 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする.

(1) $u(x,y) = e^{-y}(x\cos x + 3\cos x - y\sin x - 5\sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ.

(2) f が領域 D で正則で $|f| = R$（正の定数）のとき，f は D で定数であることを示せ.

(3) $u(x,y)=x^5-2y^3+x^2+y^2$, $v(x,y)=x^4y-x^4+2xy^2+2xy$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{i}{2}\log 5\right)$ を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

(2) 方程式 $\cos z=3$ を満たす $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ を求めよ．

科目名	解析学	対象	2OB	学部研究科	理学部第一部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 27 年 6 月 18 日 (木) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		
試験時間	90 分	注意事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

1 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする．

(1) $u(x,y) = e^{-y}(x\cos x + 3\cos x - y\sin x - 5\sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

u は $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級であり

$$u_x = e^{-y}\{1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x) - 3\sin x - y\cos x - 5\cos x\}$$
$$= e^{-y}(-x\sin x - 3\sin x - y\cos x - 4\cos x)$$
$$u_y = -e^{-y}\cdot(x\cos x + 3\cos x - y\sin x - 5\sin x) + e^{-y}\cdot(-\sin x)$$
$$= e^{-y}(-x\cos x - 3\cos x + y\sin x + 4\sin x)$$

である．よって，C-R ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) すなわち

$$\begin{cases} v_x = e^{-y}(x\cos x + 3\cos x - y\sin x - 4\sin x) & \cdots ① \\ v_y = e^{-y}(-x\sin x - 3\sin x - y\cos x - 4\cos x) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす v を求めればよい．

①より

$$v = \int e^{-y}(x\cos x + 3\cos x - y\sin x - 4\sin x)\,dx$$
$$= e^{-y}\{(x\sin x + \cos x) + 3\sin x + y\cos x + 4\cos x\} + \varphi(y)$$
$$= e^{-y}(x\sin x + 3\sin x + y\cos x + 5\cos x) + \varphi(y)$$

このとき

$$v_y = -e^{-y}\cdot(x\sin x + 3\sin x + y\cos x + 5\cos x) + e^{-y}\cdot\cos x + \varphi'(y)$$
$$= e^{-y}(-x\sin x - 3\sin x - y\cos x - 4\cos x) + \varphi'(y)$$

これと②を比較すると

$\varphi'(y) = 0$ $\therefore\ \varphi(y) = C$ (定数)

よって

$$v = e^{-y}(x\sin x + 3\sin x + y\cos x + 5\cos x) + C$$

(C:定数)

また

$$f = e^{-y}(x\cos x + 3\cos x - y\sin x - 5\sin x) + i\{e^{-y}(x\sin x + 3\sin x + y\cos x + 5\cos x + C\}$$
$$= e^{-y}\{x(\cos x + i\sin x) + 3(\cos x + i\sin x) + iy(\cos x + i\sin x) + 5i(\cos x + i\sin x)\} + iC$$
$$= e^{-y}(\cos x + i\sin x)(x + 3 + iy + 5i) + iC$$
$$= e^{-y+ix}(x + iy + 3 + 5i) + iC$$
$$= (x + iy + 3 + 5i)e^{i(x+iy)} + iC$$
$$= (z + 3 + 5i)e^{iz} + iC \quad (C:\text{定数})$$

さらに

$$f' = 1\cdot e^{iz} + (z + 3 + 5i)\cdot ie^{iz}$$
$$= (iz - 4 + 3i)e^{iz}$$

(2) f が領域 D で正則で $|f| = R$ (正の定数) のとき，f は D で定数であることを示せ．

別の過去問に解答あります

(3) $u(x,y)=x^5-2y^3+x^2+y^2$, $v(x,y)=x^4y-x^4+2xy^2+2xy$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

u, v : $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級だから，C-R すなわち

$$\begin{cases} 5x^4+2x = x^4+4xy+2x & \cdots ① \\ -6y^2+2y = -(4x^3y-4x^3+2y^2+2y) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす x, y の条件を求めればよい．

① より　$4x^4-4xy=0$

$4x(x^3-y)=0$

$\therefore\ x=0 \lor y=x^3$

② より　$4x^3y-4x^3-4y^2+4y=0$

$4x^3(y-1)-4y(y-1)=0$

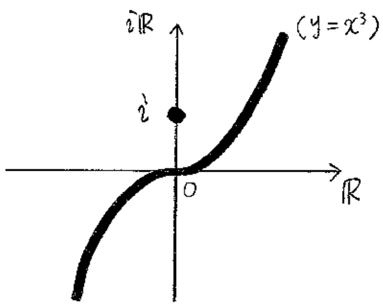
$4(y-1)(x^3-y)=0$

$\therefore\ y=1 \lor y=x^3$

よって，① ∧ ② より

$(x,y)=(0,1) \lor y=x^3$

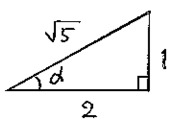
ゆえに，f が微分可能である点全体は図の太線部



2 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{i}{2}\log 5\right)$ を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$



$$\cosh\left(\tfrac{1}{2}\log 5\right)=\cosh(\log\sqrt{5})$$
$$=\frac{e^{\log\sqrt{5}}+e^{-\log\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\sinh\left(\tfrac{1}{2}\log 5\right)=\sinh(\log\sqrt{5})$$
$$=\frac{e^{\log\sqrt{5}}-e^{-\log\sqrt{5}}}{2}=\frac{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

だから

$$\sin\left(\alpha+\tfrac{i}{2}\log 5\right)=\sin\alpha\cosh\left(\tfrac{1}{2}\log 5\right)+i\cos\alpha\sinh\left(\tfrac{1}{2}\log 5\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}+i\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$
$$\left(=\frac{3+4i}{5}\right)$$

(2) 方程式 $\cos z=3$ を満たす $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ を求めよ．

$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ を $\cos z=3$ へ代入すると

$\cos(x+iy)=3$

$\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y=3$

$$\therefore \begin{cases} \cos x\cosh y=3 & \cdots ① \\ \sin x\sinh y=0 & \cdots ② \end{cases}$$

② より　$\sin x=0 \lor \sinh y=0$

(i) $\sin x=0$ のとき

$x=m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$

このとき，① より

$\cos(m\pi)\cosh y=3$

$(-1)^m\cosh y=3$

$\therefore\ \cosh y=(-1)^m\cdot 3$

ここで，$\cosh y=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}\geqq\sqrt{e^y\cdot e^{-y}}=2$ だから

$m=2m$ $(m\in\mathbb{Z})$

であり，このとき，$\cosh y=3$ より

$\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}=3$

$(e^y)^2-6e^y+1=0$

$e^y=3\pm2\sqrt{2}$

$\therefore\ y=\log(3\pm2\sqrt{2})$

(ii) $\sinh y=0$ のとき

$\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}=0$

$e^y=e^{-y}$

$\therefore\ y=0$

このとき，① より　$\cos x=3$

これをみたす $x\in\mathbb{R}$ は存在しない．

以上 (i)，(ii) より

$$z=2m\pi+i\log(3\pm2\sqrt{2})\quad(m\in\mathbb{Z})$$