

科目名	解析学 B 解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 28 年 11 月 24 日 (木) 3 回目 (~ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 2. 下記のみ参照 持込可 ()							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

① 次の関数の $z = 0$ を中心とする ^{ローラン} Laurent 展開を与えられた範囲で求めよ。(10 点)

(1) $\frac{1}{z^3(z-7)^2} \quad (0 < |z| < 7)$

(2) $\frac{5z-11}{(z+5)(z-7)} \quad (5 < |z| < 7)$

② 次の積分を求めよ。ただし、積分経路は正の向きとする。(40 点)

(1) $\int_{|z|=4} \frac{7z-4}{(z-3)(z+6)^2} dz$

(2) $\int_{|z|=3} \frac{5z-3}{z(z-1)(z+2)(z-4)} dz$

(3) $\int_{|z|=6} \frac{z}{(z^2+4)(z-9)} dz$

$$(4) \int_{|z|=2} \frac{z-3}{z(2z-1)(2z+5)} dz$$

$$(7) \int_{|z+2|=1} \frac{-2z^2+5z-1}{z^3(z+2)^4} dz$$

$$(5) \int_{|z|=4} \frac{z^2+4}{(z-2)(3z+1)} dz$$

$$(8) \int_{|z-2|=\sqrt{2}} \frac{\text{Log } z}{(z+2)(z-1)^2} dz$$

$$(6) \int_{|z|=2} \frac{5\sin(i\pi z)+12}{(z+3i)(2z+3i)(6z-i)} dz$$

1

$|z| < 1$ のとき $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ が成り立つことを用いる.

2

解答では, Cauchy の積分公式と Goursat の定理を用いているが, Cauchy の積分定理や留数定理を用いてもかまわない.

★ Cauchy の積分公式, Goursat の定理

$f(z)$: 領域 D で正則

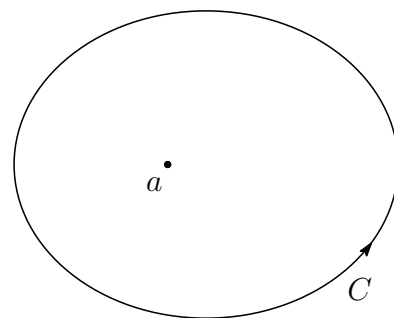
C : D 内の区分的なめらかな単純閉曲線で内部も D に含まれる (正の向き)

a : C の内部の点

のとき, 次が成り立つ.

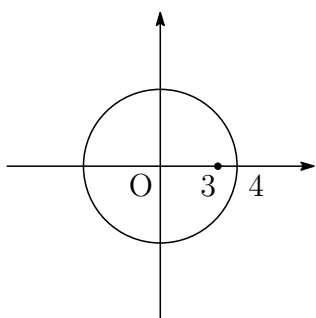
$$(1) f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-a} dz$$

$$(2) f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{N})$$

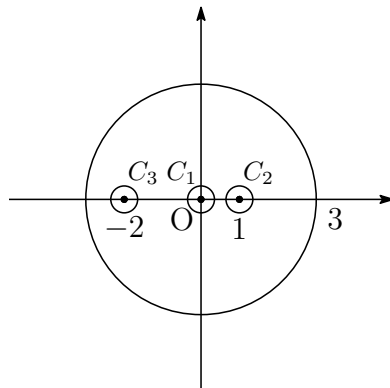


★各問題の図 (解答内にはけなかったのここにとめます)

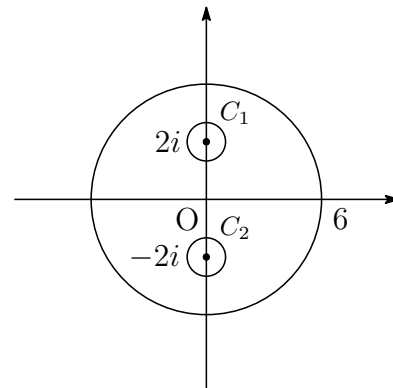
(1)



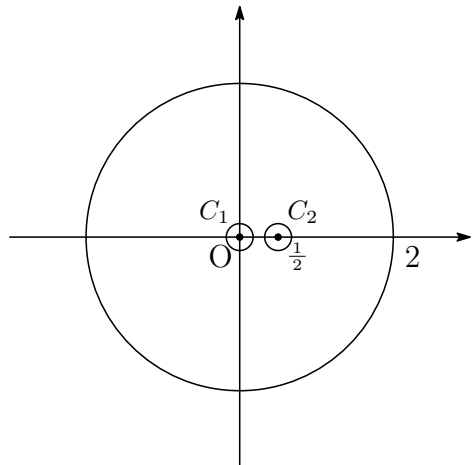
(2)



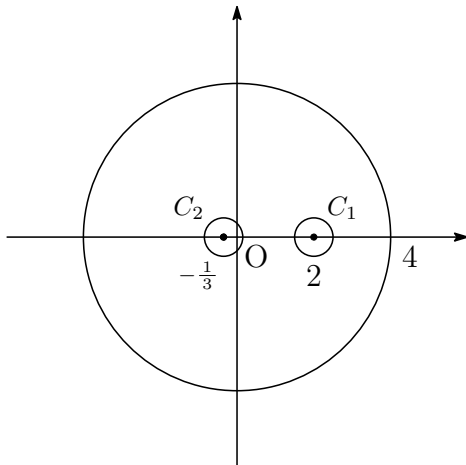
(3)



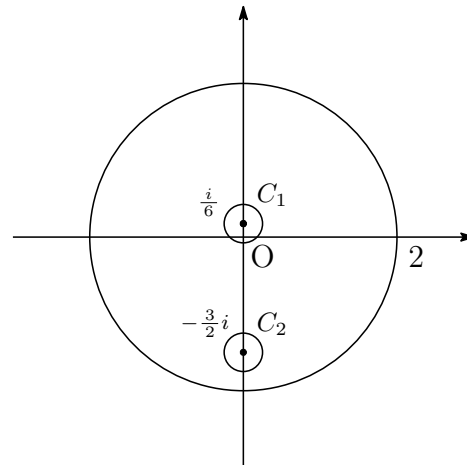
(4)



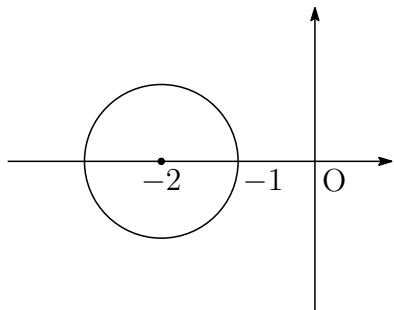
(5)



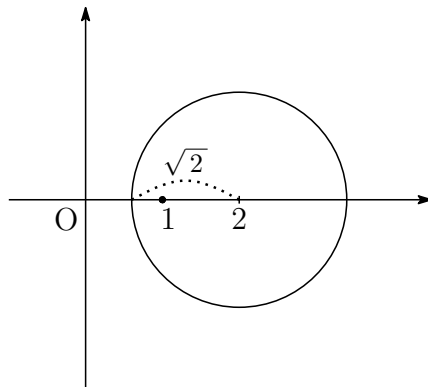
(6)



(7)



(8)



科目名	解析学 B 解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 28 年 11 月 24 日 (木)	3 回目 (~ 時限目)	担 当	石川 学	学 年		氏 名				
試 験 時 間	90 分	注 意 事 項	① 筆記用具以外持込不可 ② 下記のみ参照 持込可 ()							

- ★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします。
- ★解答はすべて記述式とし、答えのみは正解としません。

〔1〕次の関数の $z = 0$ を中心とする ローラン展開 を与えられた範囲で求めよ。(10 点)

(1) $\frac{1}{z^3(z-7)^2} \quad (0 < |z| < 7)$

解答

$0 < |z| < 7$ のとき $\left|\frac{z}{7}\right| < 1$ であるから

$$\frac{1}{z-7} = -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{7}} = -\frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{7}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{7^{n+1}}$$

微分すると

$$-\frac{1}{(z-7)^2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{7^{n+1}} \quad \therefore \quad \frac{1}{(z-7)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{7^{n+1}}$$

よって

$$\frac{1}{z^3(z-7)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^{n-4}}{7^{n+1}} \quad (0 < |z| < 7)$$

(2) $\frac{5z-11}{(z+5)(z-7)} \quad (5 < |z| < 7)$

解答

$$\frac{5z-11}{(z+5)(z-7)} = \frac{2}{z-7} + \frac{3}{z+5} \text{ である.}$$

$5 < |z| < 7$ のとき、(1) の過程より

$$\frac{2}{z-7} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{7^{n+1}}$$

また $\left|-\frac{5}{z}\right| < 1$ であるから

$$\frac{3}{z+5} = \frac{3}{z} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{5}{z}\right)} = \frac{3}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-5)^n}{z^{n+1}}$$

よって

$$\frac{5z-11}{(z+5)(z-7)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^n}{7^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot (-5)^n}{z^{n+1}} \quad (5 < |z| < 7)$$

〔2〕次の積分を求めよ。ただし、積分経路は正の向きとする。(40 点)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{|z|=4} \frac{7z-4}{(z-3)(z+6)^2} dz \\ &= \int_{|z|=4} \frac{7z-4}{z-3} dz \\ &= 2\pi i \cdot \frac{7z-4}{(z+6)^2} \Big|_{z=3} \\ &= 2\pi i \cdot \frac{17}{81} = \frac{34}{81} \pi i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \int_{|z|=3} \frac{5z-3}{z(z-1)(z+2)(z-4)} dz \\ &= \int_{C_1} \frac{5z-3}{(z-1)(z+2)(z-4)} dz + \int_{C_2} \frac{5z-3}{z(z+2)(z-4)} dz \\ &\quad + \int_{C_3} \frac{5z-3}{z(z-1)(z-4)} dz \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{5z-3}{(z-1)(z+2)(z-4)} \Big|_{z=0} + \frac{5z-3}{z(z+2)(z-4)} \Big|_{z=1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5z-3}{z(z-1)(z-4)} \Big|_{z=-2} \right\} \\ &= 2\pi i \left(-\frac{3}{8} - \frac{2}{9} + \frac{13}{36} \right) \\ &= 2\pi i \cdot \left(-\frac{17}{72} \right) = -\frac{17}{36} \pi i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \int_{|z|=6} \frac{z}{(z^2+4)(z-9)} dz \\ &= \int_{C_1} \frac{z}{(z+2i)(z-9)} dz + \int_{C_2} \frac{z}{(z-2i)(z-9)} dz \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{z}{(z+2i)(z-9)} \Big|_{z=2i} + \frac{z}{(z-2i)(z-9)} \Big|_{z=-2i} \right\} \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{1}{2(2i-9)} + \frac{1}{2(-2i-9)} \right\} \\ &= 2\pi i \cdot \left(-\frac{9}{85} \right) = -\frac{18}{85} \pi i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad & \int_{|z|=2} \frac{z-3}{z(2z-1)(2z+5)} dz \\
&= \int_{C_1} \frac{\frac{z-3}{(2z-1)(2z+5)}}{z} dz + \int_{C_2} \frac{\frac{z-3}{2z(2z+5)}}{z - \frac{1}{2}} dz \\
&= 2\pi i \left\{ \left. \frac{z-3}{(2z-1)(2z+5)} \right|_{z=0} + \left. \frac{z-3}{2z(2z+5)} \right|_{z=\frac{1}{2}} \right\} \\
&= 2\pi i \left(\frac{3}{5} - \frac{5}{12} \right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{11}{60} = \frac{11}{30} \pi i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \quad & \int_{|z|=4} \frac{z^2+4}{(z-2)(3z+1)} dz \\
&= \int_{C_1} \frac{\frac{z^2+4}{3z+1}}{z-2} dz + \int_{C_2} \frac{\frac{z^2+4}{3(z-2)}}{z + \frac{1}{3}} dz \\
&= 2\pi i \left\{ \left. \frac{z^2+4}{3z+1} \right|_{z=2} + \left. \frac{z^2+4}{3(z-2)} \right|_{z=-\frac{1}{3}} \right\} \\
&= 2\pi i \left(\frac{8}{7} - \frac{37}{63} \right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{9} \pi i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad & \int_{|z|=2} \frac{5\sin(i\pi z) + 12}{(z+3i)(2z+3i)(6z-i)} dz \\
&= \int_{C_1} \frac{\frac{5\sin(i\pi z) + 12}{6(z+3i)(2z+3i)}}{z - \frac{i}{6}} dz + \int_{C_2} \frac{\frac{5\sin(i\pi z) + 12}{2(z+3i)(6z-i)}}{z + \frac{3}{2}i} dz \\
&= 2\pi i \left\{ \left. \frac{5\sin(i\pi z) + 12}{6(z+3i)(2z+3i)} \right|_{z=\frac{i}{6}} + \left. \frac{5\sin(i\pi z) + 12}{2(z+3i)(6z-i)} \right|_{z=-\frac{2}{3}i} \right\} \\
&= 2\pi i \left(-\frac{3}{20} + \frac{7}{30} \right) \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{12} = \frac{\pi}{6} i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(7) \quad & \int_{|z+2|=1} \frac{-2z^2+5z-1}{z^3(z+2)^4} dz \\
&= \int_{|z+2|=1} \frac{-2z^{-1}+5z^{-2}-z^{-3}}{(z+2)^4} dz \\
&= \frac{2\pi i}{3!} \cdot (-2z^{-1}+5z^{-2}-z^{-3})^{(3)} \Big|_{z=-2} \\
&= \frac{\pi i}{3} \cdot (12z^{-4}-120z^{-5}+60z^{-6}) \Big|_{z=-2} \\
&= \frac{\pi i}{3} \cdot \frac{87}{16} = \frac{29}{16} \pi i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(8) \quad & \int_{|z-2|=\sqrt{2}} \frac{\operatorname{Log} z}{(z+2)(z-1)^2} dz \\
&= \int_{|z-2|=\sqrt{2}} \frac{\frac{\operatorname{Log} z}{z+2}}{(z-1)^2} dz \\
&= \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left(\frac{\operatorname{Log} z}{z+2} \right)^{(1)} \Big|_{z=1} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{\frac{1}{z} \cdot (z+2) - \operatorname{Log} z \cdot 1}{(z+2)^2} \Big|_{z=1} \\
&= 2\pi i \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \pi i
\end{aligned}$$