2016 年度解析学後期定期試験について

$\boxed{1}$ 留数計算（4 問，20 点）

※昨年度の過去問でいうと，後期定期試験の $\boxed{2}$ です．問題は過去問とほとんど同じです．留数の求め方は，11 月 10 日のノートや教科書等で確認してください．

$\boxed{2}$ 留数定理の実積分への応用（5 問，60 点）

※昨年度の過去問でいうと，後期定期試験の $\boxed{4}$（に 1 問追加）です．授業では以下の結果を証明しました．多少表現が異なるところもあると思いますが，今回の試験に適用しやすいようにしてあります．これらの結果は試験問題の裏面に印刷しておくので，これらの結果を用いて正しく計算をしてください．計算ミスでは点数がつきません．(1)〜(4) までは昨年度の過去問とほとんど同じです．必要に応じて過去問をさかのぼって準備してください．(5) は【結果 5】を用いる追加分です．少し計算が大変かもしれません．

> **【結果 1】**
> $R(X,Y)$ を X, Y の有理関数とし
> $$f(z) = R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{1}{iz}$$
> が $C : |z| = 1$（正の向き）上には極をもたないとする．このとき，C 内にある f の異なる極を $a_1, \ldots, a_m$ とすると
> $$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}[f, a_j]$$

以下において，P, Q は共通因数をもたない z の実数係数多項式とし，次数をそれぞれ $\deg P$, $\deg Q$ で表す．また $f = \dfrac{P}{Q}$ とする．

> **【結果 2】**
> (1) $\deg Q \geqq \deg P + 2$　　(2) $Q = 0$ は実数解をもたない
>
> をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1, \ldots, a_m$ とすると
> $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}[f, a_j]$$

【結果 3】

(1) $\deg Q \geqq \deg P + 1$　　(2) $Q = 0$ は実数解をもたない

をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1, \ldots, a_m$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin x dx = 2\pi \mathrm{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, a_j] \right\}$$

【結果 4】

(1) $\deg Q \geqq \deg P + 2$　　(2) $Q = 0$ は実数解をもたない　　(3) f は偶関数

をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1, \ldots, a_m$ とすると

$$\int_{0}^{\infty} f(x) \log x dx = -\pi \mathrm{Im} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z) \log z, a_j] \right\}$$

ただし，右辺において $\log z$ は $0 < \arg z < \pi$ で考える．

【結果 5】

(1) $\deg Q \geqq \deg P + 2$　　(2) $Q = 0$ は 0 以上の実数解をもたない

をみたすとする．このとき，f の異なる極を $a_1, \ldots, a_m$ とすると

$$\int_{0}^{\infty} f(x) \log x dx = -\frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2, a_j] \right\}$$

ただし，右辺において $\log z$ は $0 < \arg z < 2\pi$ で考える．

【結果 5】を用いて $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 - 2x + 4} dx$ を求めると次のようになる．

$\dfrac{1}{z^2 - 2z + 4}$ の極は $1 \pm \sqrt{3}i$ であり，これらの極における $\dfrac{(\log z)^2}{z^2 - 2z + 4}$ の留数の和は

$$\mathrm{Res}\left[\frac{(\log z)^2}{z^2 - 2z + 4}, 1 + \sqrt{3}i\right] + \mathrm{Res}\left[\frac{(\log z)^2}{z^2 - 2z + 4}, 1 - \sqrt{3}i\right]$$

$$= \left.\frac{(\log z)^2}{z - (1 - \sqrt{3}i)}\right|_{z = 1 + \sqrt{3}i} + \left.\frac{(\log z)^2}{z - (1 + \sqrt{3}i)}\right|_{z = 1 - \sqrt{3}i}$$

$$= \frac{(\log 2 + \frac{\pi}{3}i)^2}{2\sqrt{3}i} + \frac{(\log 2 + \frac{5}{3}\pi i)^2}{-2\sqrt{3}i}$$

$$= -\frac{4}{3\sqrt{3}} \pi \log 2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} \pi^2 i$$

よって

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 - 2x + 4} dx = -\frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(-\frac{4}{3\sqrt{3}} \pi \log 2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} \pi^2 i \right) = \frac{2}{3\sqrt{3}} \pi \log 2$$

※留数計算を，例えば次のようにしてもよい．

$$\operatorname{Res}\left[\frac{(\log z)^2}{z^2-2z+4}, 1+\sqrt{3}\,i\right] = \left.\frac{(\log z)^2}{(z^2-2z+4)'}\right|_{z=1+\sqrt{3}\,i} = \frac{(\log 2+\frac{\pi}{3}i)^2}{2\sqrt{3}\,i}$$