科目名	解析学B 解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 29 年 1 月 19 日 (木) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名	
試験 時間	60 分	注意 事項	1 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照 持込可~~ ( )						

評 点

平成 28 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次の場合に，留数 $\mathrm{Res}[f,a]$ を求めよ． （20 点）

(1) $f(z)=\dfrac{3z-11}{(z+5)(z-8)^2},\ a=-5$ (2) $f(z)=\dfrac{\sin(i\pi z)}{z(4z+3i)(2z-i)},\ a=-\dfrac{3}{4}i$

(3) $f(z)=\dfrac{z^5-2z^2+3}{z^3(z-2)^4},\ a=2$ (4) $f(z)=z^7\cos\dfrac{3}{2z},\ a=0$

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．必要ならば，裏面にある結果を用いてよい． （60 点）

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{53-28\cos\theta}d\theta$ (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x+3}{(x^2+4)(x^2-6x+10)}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x}{(x^2+9)^2}dx$ (4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^2+25}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^3+8}dx$

【結果 1】
$R(X,Y)$ を X,Y の有理関数とし

$$f(z)=R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{1}{iz}$$

が $C:|z|=1$（正の向き）上には極をもたないとする．このとき，C 内にある f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f,a_j]$$

以下において，P,Q は共通因数をもたない z の実数係数多項式とし，次数をそれぞれ $\deg P$, $\deg Q$ で表す．また $f=\dfrac{P}{Q}$ とする．

【結果 2】
(1) $\deg Q\geqq\deg P+2$　　(2) $Q=0$ は実数解をもたない

をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f,a_j]$$

【結果 3】
(1) $\deg Q\geqq\deg P+1$　　(2) $Q=0$ は実数解をもたない

をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin x dx=2\pi\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},a_j]\right\}$$

【結果 4】
(1) $\deg Q\geqq\deg P+2$　　(2) $Q=0$ は実数解をもたない　　(3) f は偶関数

をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_0^{\infty}f(x)\log x dx=-\pi\mathrm{Im}\left\{\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z)\log z,a_j]\right\}$$

ただし，右辺において $\log z$ は $0<\arg z<\pi$ で考える．

【結果 5】
(1) $\deg Q\geqq\deg P+2$　　(2) $Q=0$ は 0 以上の実数解をもたない

をみたすとする．このとき，f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_0^{\infty}f(x)\log x dx=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2,a_j]\right\}$$

ただし，右辺において $\log z$ は $0<\arg z<2\pi$ で考える．

$\boxed{1}$ 次の場合に，留数 $\mathrm{Res}[f,a]$ を求めよ．　　　　（20 点）

(1) $f(z)=\dfrac{3z-11}{(z+5)(z-8)^2}$, $a=-5$　　(2) $f(z)=\dfrac{\sin(i\pi z)}{z(4z+3i)(2z-i)}$, $a=-\dfrac{3}{4}i$

(3) $f(z)=\dfrac{z^5-2z^2+3}{z^3(z-2)^4}$, $a=2$　　(4) $f(z)=z^7\cos\dfrac{3}{2z}$, $a=0$

解答

(1) $\mathrm{Res}[f,-5]=(z+5)f(z)\Big|_{z=-5}=\dfrac{3z-11}{(z-8)^2}\Big|_{z=-5}=-\dfrac{2}{13}$

(2) $\mathrm{Res}\left[f,-\dfrac{3}{4}i\right]=\left(z+\dfrac{3}{4}i\right)f(z)\Big|_{z=-\frac{3}{4}i}=\dfrac{\sin(i\pi z)}{4z(2z-i)}\Big|_{-\frac{3}{4}i}=-\dfrac{\sqrt{2}}{15}$

(3) $\mathrm{Res}[f,2]=\dfrac{1}{3!}\{(z-2)^4f(z)\}^{(3)}\Big|_{z=2}=\dfrac{1}{3!}\left(z^2-2z^{-1}+3z^{-3}\right)^{(3)}\Big|_{z=2}=\dfrac{1}{3!}\left(12z^{-4}-180z^{-6}\right)\Big|_{z=2}=-\dfrac{11}{32}$

(4) $z\neq 0$ のとき

$$z^7\cos\frac{3}{2z}=z^7\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{3}{2z}\right)^{2n}=z^7\left\{1-\frac{1}{2!}\left(\frac{3}{2z}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{3}{2z}\right)^4-\frac{1}{6!}\left(\frac{3}{2z}\right)^6+\frac{1}{8!}\left(\frac{3}{2z}\right)^8-\cdots\right\}$$

であるから

$$\mathrm{Res}[f,0]=\frac{1}{8!}\left(\frac{3}{2}\right)^8=\frac{729}{1146880}$$

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．必要ならば，裏面にある結果を用いてよい．　　　　（60 点）

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{53-28\cos\theta}d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x+3}{(x^2+4)(x^2-6x+10)}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x}{(x^2+9)^2}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^2+25}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^3+8}dx$

解答

(1) 【結果 1】を用いる．

$$f(z)=\frac{1}{53-28\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{1}{iz}=\frac{1}{i(-14z^2+53z-14)}=\frac{-1}{i(2z-7)(7z-2)}$$

は $|z|=1$ 上には極をもたず，$|z|=1$ の内部にある極は $\dfrac{2}{7}$ である．よって

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{53-28\cos\theta}d\theta=2\pi i\cdot\mathrm{Res}\left[f,\frac{2}{7}\right]=2\pi i\cdot\left(z-\frac{2}{7}\right)f(z)\Big|_{z=\frac{2}{7}}=2\pi i\cdot\frac{-1}{7i(2z-7)}\Big|_{z=\frac{2}{7}}=\frac{2}{45}\pi$$

(2) 【結果 2】を用いる．

$f(z)=\dfrac{2z+3}{(z^2+4)(z^2-6z+10)}$ は【結果 2】の仮定をみたし，上半平面内にある f の極は $2i,\ 3+i$ である．よって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2x+3}{(x^2+4)(x^2-6x+10)}dx &= 2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,2i]+\mathrm{Res}[f,3+i]\big)\\ &= 2\pi i\left[(z-2i)f(z)\Big|_{z=2i}+\{z-(3+i)\}f(z)\Big|_{z=3+i}\right]\\ &= 2\pi i\left[\frac{2z+3}{(z+2i)(z^2-6z+10)}\Big|_{z=2i}+\frac{2z+3}{(z^2+4)\{z-(3-i)\}}\Big|_{z=3+i}\right]\\ &= 2\pi i\left\{\frac{3+4i}{4i\cdot(6-12i)}+\frac{9+2i}{(12+6i)\cdot 2i}\right\}\\ &= \frac{7}{12}\pi\end{aligned}$$

(3) 【結果 3】を用いる．

$f(z) = \dfrac{z^3}{(z^2+9)^2}$ は【結果 3】の仮定をみたし，上半平面内にある f の極は $3i$ である．そして

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, 3i] &= \frac{1}{1!}\left\{(z-3i)^2 f(z)e^{iz}\right\}^{(1)}\Big|_{z=3i} \\
&= \left\{\frac{z^3 e^{iz}}{(z+3i)^2}\right\}'\Bigg|_{z=3i} \\
&= \frac{(3z^2\cdot e^{iz} + z^3\cdot ie^{iz})\cdot(z+3i)^2 - z^3e^{iz}\cdot 2(z+3i)}{(z+3i)^4}\Bigg|_{z=3i} \\
&= \frac{z^2\{(3+iz)(z+3i)-2z\}e^{iz}}{(z+3i)^3}\Bigg|_{z=3i} \\
&= \frac{(3i)^2(0\cdot 6i - 6i)e^{-3}}{(6i)^3} \\
&= -\frac{1}{4e^3}
\end{aligned}$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{(x^2+9)^2}dx = 2\pi\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{Res}[f(z)e^{iz}, 3i]\Big\} = 2\pi\cdot\left(-\frac{1}{4e^3}\right) = -\frac{\pi}{2e^3}$$

(4) 【結果 4】を用いる．

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+25}$ は【結果 4】の仮定をみたし，上半平面内にある f の極は $5i$ である．そして

$$\mathrm{Res}[f(z)\log z, 5i] = (z-5i)f(z)\log z\Big|_{z=5i} = \frac{\log z}{z+5i}\Bigg|_{z=5i} = \frac{\log 5 + \frac{\pi}{2}i}{10i} = \frac{\pi}{20} - \frac{i}{10}\log 5$$

であるから

$$\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^2+25}dx = -\pi\mathrm{Im}\Big\{\mathrm{Res}[f(z)\log z, 5i]\Big\} = -\pi\cdot\left(-\frac{1}{10}\log 5\right) = \frac{\pi}{10}\log 5$$

(5) 【結果 5】を用いる．

$f(z) = \dfrac{1}{z^3+8}$ は【結果 5】の仮定をみたし，f の極は $-2,\ 1\pm\sqrt{3}\,i$ である．そして

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2, -2] + \mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2, 1+\sqrt{3}\,i] + \mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2, 1-\sqrt{3}\,i] \\
&= \frac{(\log z)^2}{(z^3+8)'}\Bigg|_{z=-2} + \frac{(\log z)^2}{(z^3+8)'}\Bigg|_{z=1+\sqrt{3}\,i} + \frac{(\log z)^2}{(z^3+8)'}\Bigg|_{z=1-\sqrt{3}\,i} \\
&= \frac{(\log z)^2}{3z^2}\Bigg|_{z=-2} + \frac{(\log z)^2}{3z^2}\Bigg|_{z=1+\sqrt{3}\,i} + \frac{(\log z)^2}{3z^2}\Bigg|_{z=1-\sqrt{3}\,i} \\
&= \frac{z(\log z)^2}{3z^3}\Bigg|_{z=-2} + \frac{z(\log z)^2}{3z^3}\Bigg|_{z=1+\sqrt{3}\,i} + \frac{z(\log z)^2}{3z^3}\Bigg|_{z=1-\sqrt{3}\,i} \\
&= \frac{-2(\log 2+\pi i)^2}{3\cdot(-8)} + \frac{(1+\sqrt{3}\,i)\left(\log 2 + \frac{\pi}{3}i\right)^2}{3\cdot(-8)} + \frac{(1-\sqrt{3}\,i)\left(\log 2+\frac{5}{3}\pi i\right)^2}{3\cdot(-8)} \\
&= -\frac{1}{24}\left[-2(\log 2+\pi i)^2 + (1+\sqrt{3}\,i)\left\{(\log 2+\pi i) - \frac{2}{3}\pi i\right\}^2 + (1-\sqrt{3}\,i)\left\{(\log 2+\pi i)^2 + \frac{2}{3}\pi i\right\}^2\right] \\
&= -\frac{1}{24}\left[-2(\log 2+\pi i)^2 + (1+\sqrt{3}\,i)\left\{(\log 2+\pi i)^2 - \frac{4}{3}\pi i(\log 2+\pi i) - \frac{4}{9}\pi^2\right\}\right. \\
&\qquad\qquad \left. +(1-\sqrt{3}\,i)\left\{(\log 2+\pi i)^2 + \frac{4}{3}\pi i(\log 2+\pi i) - \frac{4}{9}\pi^2\right\}\right]
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{24}\left[(\log 2 + \pi i)^2 \cdot \{(-2) + (1+\sqrt{3}\,i) + (1-\sqrt{3}\,i)\} - \frac{4}{3}\pi i(\log 2 + \pi i) \cdot \{(1+\sqrt{3}\,i) - (1-\sqrt{3}\,i)\} \right.$$
$$\left. - \frac{4}{9}\pi^2 \cdot \{(1+\sqrt{3}\,i) + (1-\sqrt{3}\,i)\}\right]$$
$$= -\frac{1}{24}\left[(\log 2 + \pi i)^2 \cdot 0 - \frac{4}{3}\pi i(\log 2 + \pi i) \cdot 2\sqrt{3}\,i - \frac{4}{9}\pi^2 \cdot 2\right]$$
$$= -\frac{1}{24}\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\pi \log 2 - \frac{8}{9}\pi^2 + \frac{8}{\sqrt{3}}\pi^2 i\right)$$
$$= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\log 2 + \frac{\pi^2}{27} - \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}i$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\log x}{x^3+8}dx &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2, -2] + \mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2, 1+\sqrt{3}\,i] + \mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2, 1-\sqrt{3}\,i]\Big\} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\log 2 + \frac{\pi^2}{27}\right) \\
&= \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\log 2 - \frac{\pi^2}{54}
\end{aligned}$$