科目名	解析学 A 解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 28 年 6 月 16 日 (木) 3 回目 (～ 時限目)		担当	石川 学	学年		氏名			
試験 時間	90 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評 点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする．

(1) $u(x,y) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x - 4\sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

点

(2) $u(x,y) = \dfrac{x^3 + 5xy^2}{x^2 + y^2}$，$v(x,y) = \dfrac{x^2y - 3y^3}{x^2 + y^2}$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

点

(3) $u(x,y)=(x^2+y^2-x-y)(x^2+y^2-2)$,
$v(x,y)=(-x+y)(x^2+y^2-2)$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{i}{2}\log 17\right)$ を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha=\dfrac{5}{3}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

点

(2) 方程式 $\cos z=-2$ を満たす $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ を求めよ．

点

科目名	解析学A 解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 28 年 6 月 16 日 (木) 3 回目 (〜 時限目)		担当	石川 学	学年		氏名				
試験 時間	90 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする．

(1) $u(x,y) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x - 4\sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

u は $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級で

$$u_x = e^{-y}\{1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x) - y\cos x - 4\cos x\}$$
$$= e^{-y}(-x\sin x - y\cos x - 3\cos x)$$
$$u_y = -e^{-y}\cdot(x\cos x - y\sin x - 4\sin x) + e^{-y}\cdot(-\sin x)$$
$$= e^{-y}(-x\cos x + y\sin x + 3\sin x)$$

である．よって，C-R ($u_x = v_y,\ u_y = -v_x$) すなわち

$$\begin{cases} v_y = e^{-y}(-x\sin x - y\cos x - 3\cos x) & \cdots ① \\ v_x = e^{-y}(x\cos x - y\sin x - 3\sin x) & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす v を求めればよい．

② より

$$v = \int e^{-y}(x\cos x - y\sin x - 3\sin x)\,dx$$
$$= e^{-y}\{(x\sin x + \cos x) + y\cos x + 3\cos x\} + \varphi(y)$$
$$= e^{-y}(x\sin x + y\cos x + 4\cos x) + \varphi(y)$$

このとき

$$v_y = -e^{-y}\cdot(x\sin x + y\cos x + 4\cos x) + e^{-y}\cdot\cos x + \varphi'(y)$$
$$= e^{-y}(-x\sin x - y\cos x - 3\cos x) + \varphi'(y)$$

だから，① より

$\varphi'(y) = 0$ $\quad \therefore \varphi(y) = C$ (定数)

よって

$$v = e^{-y}(x\sin x + y\cos x + 4\cos x) + C$$

また

$$f = u + iv$$
$$= e^{-y}(x\cos x - y\sin x - 4\sin x) + i\{e^{-y}(x\sin x + y\cos x + 4\cos x) + C\}$$
$$= e^{-y}\{x(\cos x + i\sin x) + i(y+4)(\cos x + i\sin x)\} + iC$$
$$= e^{-y}(\cos x + i\sin x)\{x + i(y+4)\} + iC$$
$$= e^{-y+ix}(x + iy + 4i) + iC$$
$$= e^{i(x+iy)}(x + iy + 4i) + iC$$
$$= (z + 4i)e^{iz} + iC$$

さらに

$$f' = 1\cdot e^{iz} + (z+4i)\cdot ie^{iz}$$
$$= (iz - 3)e^{iz}$$

点

(2) $u(x,y) = \dfrac{x^3 + 5xy^2}{x^2 + y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{x^2y - 3y^3}{x^2 + y^2}$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

u, v は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^∞ 級で

$$u_x = \frac{x^4 - 2x^2y^2 + 5y^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_y = \frac{8x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$
$$v_x = \frac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_y = \frac{x^4 - 10x^2y^2 - 3y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

である．よって，C-R ($u_x = v_y,\ u_y = -v_x$) すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{x^4 - 2x^2y^2 + 5y^4}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^4 - 10x^2y^2 - 3y^4}{(x^2+y^2)^2} & \cdots ① \\ \dfrac{8x^3y}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{8xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \cdots ② \end{cases}$$

をみたす x, y の条件を求め図示すればよい．

$(x,y) \neq (0,0)$ $\cdots ③$ の下で考える．

① より $x^4 - 2x^2y^2 + 5y^4 = x^4 - 10x^2y^2 - 3y^4$

$8y^2(x^2+y^2) = 0$

③ より $y = 0$

② より $8x^3y = -8xy^3$

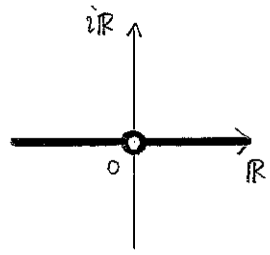
$8xy(x^2+y^2) = 0$

③ より $x = 0 \lor y = 0$

よって，求める x, y の条件は

③ $\land$ $y = 0$

となるから，f が微分可能である点全体は図の太線部になる．



点

(3) $u(x,y)=(x^2+y^2-x-y)(x^2+y^2-2)$,
$v(x,y)=(-x+y)(x^2+y^2-2)$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

u, v は $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級で

$u_x = (2x-1)\cdot(x^2+y^2-2)+(x^2+y^2-x-y)\cdot 2x$
$\quad = 4x^3+4xy^2-3x^2-y^2-2xy-4x+2$

$u_y = (2y-1)\cdot(x^2+y^2-2)+(x^2+y^2-x-y)\cdot 2y$
$\quad = 4y^3+4x^2y-x^2-3y^2-2xy-4y+2$

$v_x = -1\cdot(x^2+y^2-2)+(-x+y)\cdot 2x = -3x^2-y^2+2xy+2$

$v_y = 1\cdot(x^2+y^2-2)+(-x+y)\cdot 2y = x^2+3y^2-2xy-2$

である．よって，C-R ($u_x=v_y$, $u_y=-v_x$) すなわち

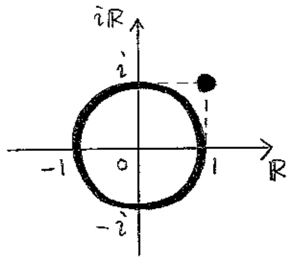
$$\begin{cases} 4x^3+4xy^2-3x^2-y^2-2xy-4x+2 = x^2+3y^2-2xy-2 & \cdots① \\ 4y^3+4x^2y-x^2-3y^2-2xy-4y+2 = 3x^2+y^2-2xy-2 & \cdots② \end{cases}$$

をみたす x, y の条件を求め図示すればよい．

① より $4x^3+4xy^2-4x^2-4y^2-4x+4=0$
$\quad 4(x-1)(x^2+y^2-1)=0$
$\quad \therefore x=1 \vee x^2+y^2=1$

② より $4y^3+4x^2y-4x^2-4y^2-4y+4=0$
$\quad 4(y-1)(x^2+y^2-1)=0$
$\quad \therefore y=1 \vee x^2+y^2=1$

よって，求める x, y の条件は
$(x=1\wedge y=1)\vee x^2+y^2=1$
$\therefore (x,y)=(1,1)\vee x^2+y^2=1$
となるから，f が微分可能である点全体は図の太線部になる．

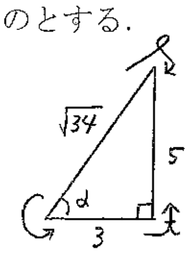


点

2 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{i}{2}\log 17\right)$ を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha=\dfrac{5}{3}$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

$\tan\alpha=\frac{5}{3}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ より



$\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$, $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{34}}$ である．また

$\cosh(\frac{1}{2}\log 17) = \cosh(\log\sqrt{17})$
$\quad = \frac{1}{2}(\sqrt{17}+\frac{1}{\sqrt{17}}) = \frac{9}{\sqrt{17}}$

$\sin(\frac{1}{2}\log 17) = \frac{1}{2}(\sqrt{17}-\frac{1}{\sqrt{17}}) = \frac{8}{\sqrt{17}}$

よって

$\sin(\alpha+\frac{i}{2}\log 17) = \sin\alpha\cosh(\frac{1}{2}\log 17)+i\cos\alpha\sinh(\frac{1}{2}\log 17)$
$\quad = \frac{5}{\sqrt{34}}\cdot\frac{9}{\sqrt{17}} + i\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{8}{\sqrt{17}}$
$\quad = \frac{45+24i}{17\sqrt{2}}$

点

(2) 方程式 $\cos z=-2$ を満たす $z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ を求めよ．

$z=x+iy$ $(x,y\in\mathbb{R})$ を $\cos z=-2$ へ代入すると

$\cos(x+iy)=-2$
$\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y = -2$

$$\therefore \begin{cases} \cos x\cosh y = -2 & \cdots① \\ \sin x\sinh y = 0 & \cdots② \end{cases}$$

② より $\sin x=0 \vee \sinh y=0$

(i) $\sin x=0$ のとき
$\quad x=m\pi \quad (m\in\mathbb{Z})$

① へ代入して
$\quad \cos m\pi\cosh y = -2$
$\quad (-1)^m\cosh y = -2$
$\quad \cosh y = -2\cdot(-1)^m$

ここで，
$\quad \cosh y = \frac{e^y+e^{-y}}{2} \geqq \sqrt{e^y\cdot e^{-y}} = 1$
より
$\quad m = 2m+1 \quad (m\in\mathbb{Z})$
であり，このとき
$\quad \cosh y = 2$
$\quad \frac{e^y+e^{-y}}{2} = 2$
$\quad (e^y)^2-4e^y+1=0$
$\quad e^y = 2\pm\sqrt{3} \quad (>0)$
$\quad \therefore y=\log(2\pm\sqrt{3})$

(ii) $\sinh y=0$ のとき
$\quad \frac{e^y-e^{-y}}{2}=0$ より $y=0$

① へ代入して $\cos x=-2$
これをみたす $x\in\mathbb{R}$ は存在しない．

以上(i), (ii) より

$z=(2m+1)\pi + i\log(2\pm\sqrt{3}) \quad (m\in\mathbb{Z})$

点