| 科目名 | 解析学B<br>解析学 | 対 象 | 2OB | 学 部<br>研究科 | 理学部第一部 | 学 科<br>専攻科 | | 学 籍<br>番 号 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 平成 29 年 11 月 9 日 (木) 3 回目<br>( ～ 時限目) | | | | 担 当 | 石川 学 | 学 年 | | 氏 名 | |
| 試 験<br>時 間 | 90 分 | 注 意<br>事 項 | ① 筆記用具以外持込不可<br>~~2. 下記のみ参照・持込可~~<br>( ) | | | | | | |

| 評 点 |
|---|
| |

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします．

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません．

$\boxed{1}$ 次の関数の $z=0$ を中心とする Laurent（ローラン）展開を与えられた範囲で求めよ． （10 点）

(1) $\dfrac{1}{z^5(z-4)^2} \quad (0<|z|<4)$

(2) $\dfrac{6z+11}{(z-4)(z+3)} \quad (3<|z|<4)$

点

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする． （40 点）

(1) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{4z+7}{(z-2)(z+4)^3}dz$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{3z-4}{z(z-1)(z+2)(z-5)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{(z^2+1)(z+6)}dz$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z-5}{z(3z-4)(3z+8)}dz$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-2)(4z+3)}dz$

(6) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{5\cos(i\pi z)+7}{(z+6i)(3z-i)(3z+4i)}dz$

(7) $\displaystyle\int_{|z-3|=2} \frac{-z^2+3z-1}{z^3(z-2)^4}dz$

(8) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{\operatorname{Log} z}{z(z-2)^2}dz$

点

$\boxed{1}$

$|z| < 1$ のとき $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ が成り立つことを用いる．

$\boxed{2}$

解答では，Cauchy の積分公式と Goursat の定理を用いているが，Cauchy の積分定理や留数定理を用いてもかまわない．

**★ Cauchy の積分公式，Goursat の定理**

$f(z)$：領域 $D$ で正則

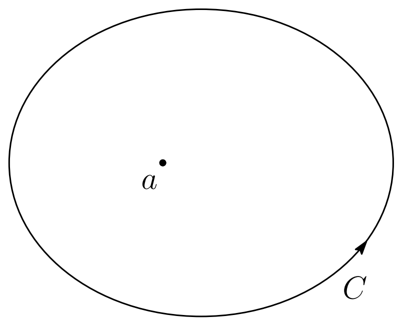
$C$：$D$ 内の区分的なめらかな単純閉曲線で内部も $D$ に含まれる（正の向き）

$a$：$C$ の内部の点

のとき，次が成り立つ．

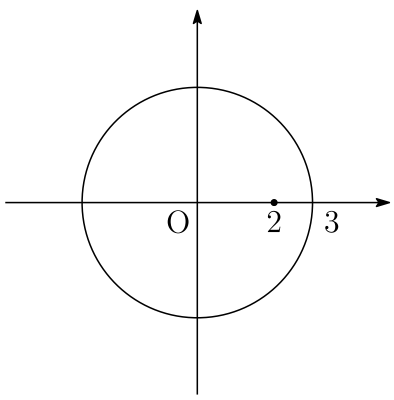
(1) $f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{z-a}dz$

(2) $f^{(n)}(a) = \dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad (n \in \mathbb{N})$

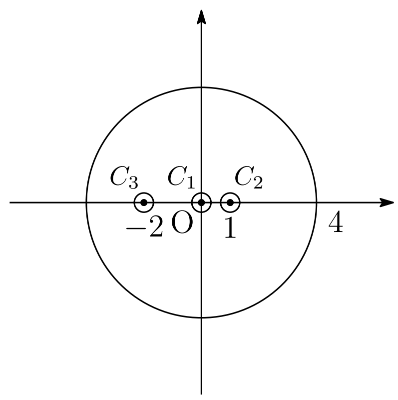



★各問題の図（解答内にかけなかったのでここにまとめます）

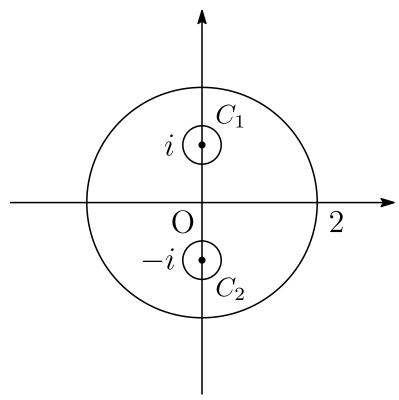
(1)



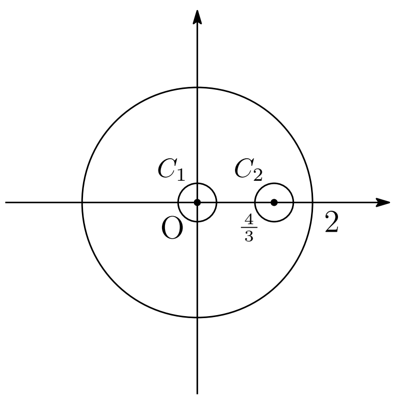

(2)



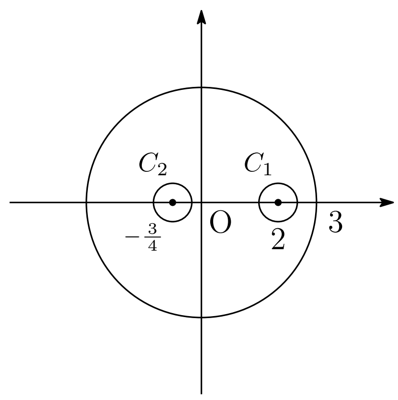

(3)



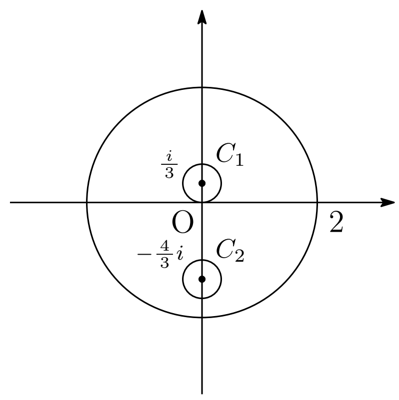

(4)



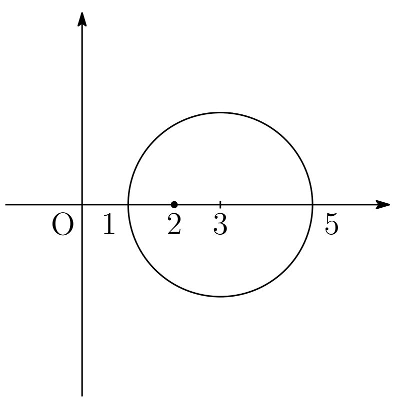

(5)



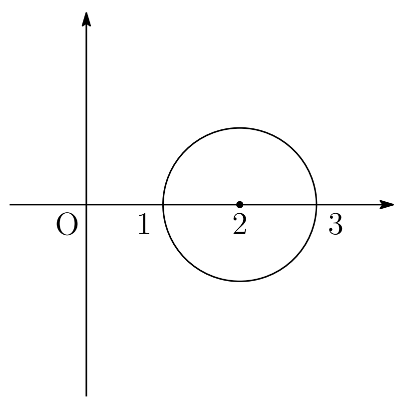

(6)




(7)




(8)



| 科目名 | 解析学 B<br>解析学 | 対象 | 2OB | 学部<br>研究科 | 理学部第一部 | 学科<br>専攻科 | | 学籍<br>番号 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 平成 29 年 11 月 9 日 (木) 3 回目 ( ～ 時限目) | | | | 担当 | 石川 学 | 学年 | | 氏名 | |
| 試験<br>時間 | 90 分 | 注意<br>事項 | 1. 筆記用具以外持込不可<br>~~2. 下記のみ参照・持込可~~<br>( ) | | | | | | |

| 評 点 |
|---|
| |

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします．

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません．

1 次の関数の $z=0$ を中心とする Laurent（ローラン）展開を与えられた範囲で求めよ． （10 点）

(1) $\dfrac{1}{z^5(z-4)^2} \quad (0<|z|<4)$

解答

$0<|z|<4$ のとき $\left|\dfrac{z}{4}\right|<1$ であるから

$$\frac{1}{z-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{4}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}$$

微分すると

$$-\frac{1}{(z-4)^2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{4^{n+1}} \qquad \therefore \quad \frac{1}{(z-4)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-1}}{4^{n+1}}$$

よって

$$\frac{1}{z^5(z-4)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n-6}}{4^{n+1}} \quad (0<|z|<4)$$

(2) $\dfrac{6z+11}{(z-4)(z+3)} \quad (3<|z|<4)$

解答

$\dfrac{6z+11}{(z-4)(z+3)}=\dfrac{5}{z-4}+\dfrac{1}{z+3}$ である．

$3<|z|<4$ のとき，(1) の過程より

$$\frac{5}{z-4}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5z^n}{4^{n+1}}$$

また $\left|-\dfrac{3}{z}\right|<1$ であるから

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}}$$

よって

$$\frac{6z+11}{(z-4)(z+3)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5z^n}{4^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \quad (3<|z|<4)$$

| | 点 |
|---|---|

2 次の積分を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする． （40 点）

(1) $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{4z+7}{(z-2)(z+4)^3}dz$

$$=\int_{|z|=3}\frac{\frac{4z+7}{(z+4)^3}}{z-2}dz$$

$$=2\pi i\cdot\left.\frac{4z+7}{(z+4)^3}\right|_{z=2}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{15}{6^3}=\frac{5}{36}\pi i$$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=4}\frac{3z-4}{z(z-1)(z+2)(z-5)}dz$

$$=\int_{C_1}\frac{\frac{3z-4}{(z-1)(z+2)(z-5)}}{z}dz+\int_{C_2}\frac{\frac{3z-4}{z(z+2)(z-5)}}{z-1}dz$$

$$+\int_{C_3}\frac{\frac{3z-4}{z(z-1)(z-5)}}{z+2}dz$$

$$=2\pi i\left\{\left.\frac{3z-4}{(z-1)(z+2)(z-5)}\right|_{z=0}+\left.\frac{3z-4}{z(z+2)(z-5)}\right|_{z=1}\right.$$

$$\left.+\left.\frac{3z-4}{z(z-1)(z-5)}\right|_{z=-2}\right\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{-4}{(-1)\cdot 2\cdot(-5)}+\frac{-1}{1\cdot 3\cdot(-4)}+\frac{-10}{(-2)\cdot(-3)\cdot(-7)}\right\}$$

$$=2\pi i\cdot\left(-\frac{11}{140}\right)=-\frac{11}{70}\pi i$$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{z}{(z^2+1)(z+6)}dz$

$$=\int_{C_1}\frac{\frac{z}{(z+i)(z+6)}}{z-i}dz+\int_{C_2}\frac{\frac{z}{(z-i)(z+6)}}{z+i}dz$$

$$=2\pi i\left\{\left.\frac{z}{(z+i)(z+6)}\right|_{z=i}+\left.\frac{z}{(z-i)(z+6)}\right|_{z=-i}\right\}$$

$$=2\pi i\left\{\frac{i}{2i(i+6)}+\frac{-i}{-2i(-i+6)}\right\}$$

$$=2\pi i\cdot\frac{6}{37}$$

$$=\frac{12}{37}\pi i$$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z-5}{z(3z-4)(3z+8)}dz$

$$= \int_{C_1} \frac{\dfrac{z-5}{(3z-4)(3z+8)}}{z}dz + \int_{C_2} \frac{\dfrac{z-5}{3z(3z+8)}}{z-\dfrac{4}{3}}dz$$

$$= 2\pi i \left\{ \left. \frac{z-5}{(3z-4)(3z+8)} \right|_{z=0} + \left. \frac{z-5}{3z(3z+8)} \right|_{z=\frac{4}{3}} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{-5}{(-4)\cdot 8} + \frac{-\dfrac{11}{3}}{4\cdot 12} \right\}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{23}{288}$$

$$= \frac{23}{144}\pi i$$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-2)(4z+3)}dz$

$$= \int_{C_1} \frac{\dfrac{z^2+1}{4z+3}}{z-2}dz + \int_{C_2} \frac{\dfrac{z^2+1}{4(z-2)}}{z+\dfrac{3}{4}}dz$$

$$= 2\pi i \left\{ \left. \frac{z^2+1}{4z+3} \right|_{z=2} + \left. \frac{z^2+1}{4(z-2)} \right|_{z=-\frac{3}{4}} \right\}$$

$$= 2\pi i \left( \frac{5}{11} + \frac{\dfrac{25}{16}}{-11} \right)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{5}{16}$$

$$= \frac{5}{8}\pi i$$

(6) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{5\cos(i\pi z)+7}{(z+6i)(3z-i)(3z+4i)}dz$

$$= \int_{C_1} \frac{\dfrac{5\cos(i\pi z)+7}{3(z+6i)(3z+4i)}}{z-\dfrac{i}{3}}dz + \int_{C_2} \frac{\dfrac{5\cos(i\pi z)+7}{3(z+6i)(3z-i)}}{z+\dfrac{4}{3}i}dz$$

$$= 2\pi i \left\{ \left. \frac{5\cos(i\pi z)+7}{3(z+6i)(3z+4i)} \right|_{z=\frac{i}{3}} + \left. \frac{5\cos(i\pi z)+7}{3(z+6i)(3z-i)} \right|_{z=-\frac{4}{3}i} \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{\dfrac{19}{2}}{19i\cdot 5i} + \frac{\dfrac{9}{2}}{14i\cdot(-5i)} \right\}$$

$$= 2\pi i \cdot \left(-\frac{1}{28}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{14}i$$

(7) $\displaystyle\int_{|z-3|=2} \frac{-z^2+3z-1}{z^3(z-2)^4}dz$

$$= \int_{|z-3|=2} \frac{-z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}{(z-2)^4}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{3!} \cdot \left. (-z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3})^{(3)} \right|_{z=2}$$

$$= \frac{\pi i}{3} \cdot \left. (6z^{-4}-72z^{-5}+60z^{-6}) \right|_{z=2}$$

$$= \frac{\pi i}{3} \cdot \left( \frac{6}{2^4} - \frac{72}{2^5} + \frac{60}{2^6} \right)$$

$$= \frac{\pi i}{3} \cdot \left( -\frac{15}{16} \right)$$

$$= -\frac{5}{16}\pi i$$

(8) $\displaystyle\int_{|z-2|=1} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z(z-2)^2}dz$

$$= \int_{|z-2|=1} \frac{\dfrac{\mathrm{Log}\, z}{z}}{(z-2)^2}dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!} \cdot \left. \left( \frac{\mathrm{Log}\, z}{z} \right)^{(1)} \right|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \cdot \left. \frac{\dfrac{1}{z}\cdot z - \mathrm{Log}\, z \cdot 1}{z^2} \right|_{z=2}$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1-\log 2}{2^2}$$

$$= \frac{1-\log 2}{2}\pi i$$

点