科目名	解析学 B 解析学	対 象	2OB	学 部 研究科	理学部第一部	学 科 専攻科		学 籍 番 号		評 点
平成 30 年 1 月 18 日 (木) 3 回目 (～ 時限目)				担 当	石川 学	学 年		氏 名		
試 験 時 間	60 分	注 意 事 項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

平成 **29** 年度後期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$ 次の場合に，留数 $\mathrm{Res}[f,a]$ を求めよ．　　（20 点）

(1) $f(z)=\dfrac{11z-2}{(z+7)(z+5)^4}$, $a=-7$　　(2) $f(z)=\dfrac{\cos(i\pi z)}{z(4z+5i)(2z+3i)}$, $a=-\dfrac{5}{4}i$

(3) $f(z)=\dfrac{z^7-z^2+1}{z^3(z+2)^5}$, $a=-2$　　(4) $f(z)=z^4\sin\left(-\dfrac{3}{z}\right)$, $a=0$

$\boxed{2}$ 次の積分を求めよ．必要ならば，裏面にある結果を用いてよい．　　（60 点）

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{65-56\cos\theta}d\theta$　　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{11x+5}{(x^2+25)(x^2+6x+13)}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx$　　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^2+\pi^2}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{(x+2)(x^2+4)}dx$

【結果 1】
$R(X,Y)$ を X,Y の有理関数とし

$$f(z)=R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\cdot\frac{1}{iz}$$

が $C:|z|=1$（正の向き）上には極をもたないとする．このとき，C 内にある f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_0^{2\pi}R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f,a_j]$$

以下において，P,Q は共通因数をもたない z の実数係数多項式とし，次数をそれぞれ $\deg P$, $\deg Q$ で表す．また $f=\dfrac{P}{Q}$ とする．

【結果 2】
(1) $\deg Q \geqq \deg P+2$　　(2) $Q=0$ は実数解をもたない

をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f,a_j]$$

【結果 3】
(1) $\deg Q \geqq \deg P+1$　　(2) $Q=0$ は実数解をもたない

をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos x dx=-2\pi\mathrm{Im}\left\{\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},a_j]\right\}$$

【結果 4】
(1) $\deg Q \geqq \deg P+2$　　(2) $Q=0$ は実数解をもたない　　(3) f は偶関数

をみたすとする．このとき，上半平面内にある f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_0^{\infty}f(x)\log x dx=-\pi\mathrm{Im}\left\{\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z)\log z,a_j]\right\}$$

ただし，右辺において $\log z$ は $0<\arg z<\pi$ で考える．

【結果 5】
(1) $\deg Q \geqq \deg P+2$　　(2) $Q=0$ は 0 以上の実数解をもたない

をみたすとする．このとき，f の異なる極を $a_1,\ldots,a_m$ とすると

$$\int_0^{\infty}f(x)\log x dx=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2,a_j]\right\}$$

ただし，右辺において $\log z$ は $0<\arg z<2\pi$ で考える．

★減点ポイント

(1) 答えの符号ミス　→　各 2 点減点

(2) 約分忘れ　→　各 1 点減点

(3) まとめ不足やミス　→　その程度により 1 点〜 5 点減点

$\boxed{1}$　次の場合に，留数 $\mathrm{Res}[f, a]$ を求めよ．　（20 点）

(1) $f(z) = \dfrac{11z-2}{(z+7)(z+5)^4}$, $a = -7$　(2) $f(z) = \dfrac{\cos(i\pi z)}{z(4z+5i)(2z+3i)}$, $a = -\dfrac{5}{4}i$

(3) $f(z) = \dfrac{z^7 - z^2 + 1}{z^3(z+2)^5}$, $a = -2$　(4) $f(z) = z^4 \sin\left(-\dfrac{3}{z}\right)$, $a = 0$

解答

(1) $\mathrm{Res}[f, -7] = (z+7)f(z)\Big|_{z=-7} = \dfrac{11z-2}{(z+5)^4}\Big|_{z=-7} = -\dfrac{79}{16}$　（5 点）

(2) $\mathrm{Res}\left[f, -\dfrac{5}{4}i\right] = \left(z + \dfrac{5}{4}i\right) f(z)\Big|_{z=-\frac{5}{4}i} = \dfrac{\cos(i\pi z)}{4z(2z+3i)}\Big|_{-\frac{5}{4}i} = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　（5 点）

(3) $\mathrm{Res}[f, -2] = \dfrac{1}{4!}\{(z+2)^5 f(z)\}^{(4)}\Big|_{z=-2} = \dfrac{1}{4!}\left(z^4 - z^{-1} + z^{-3}\right)^{(4)}\Big|_{z=-2} = \dfrac{1}{4!}\left(24 - 24z^{-5} + 360z^{-7}\right)\Big|_{z=-2} = \dfrac{117}{128}$　（5 点）

(4) $z \neq 0$ のとき

$$z^4 \sin\left(-\frac{3}{z}\right) = z^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(-\frac{3}{z}\right)^{2n+1} = z^4\left\{-\frac{3}{z} - \frac{1}{3!}\left(-\frac{3}{z}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(-\frac{3}{z}\right)^5 - \cdots\right\}$$

であるから

$\mathrm{Res}[f, 0] = \dfrac{(-3)^5}{5!} = -\dfrac{81}{40}$　（5 点）

$\boxed{2}$　次の積分を求めよ．必要ならば，裏面にある結果を用いてよい．　（60 点）

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{65 - 56\cos\theta} d\theta$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{11x+5}{(x^2+25)(x^2+6x+13)} dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^3} dx$　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2+\pi^2} dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x+2)(x^2+4)} dx$

解答

(1) 【結果 1】を用いる．

$$f(z) = \frac{1}{65 - 56\cdot\dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz} = \frac{1}{i(-28z^2 + 65z - 28)} = \frac{-1}{i(4z-7)(7z-4)}$$

は $|z| = 1$ 上には極をもたず，$|z| = 1$ の内部にある極は $\dfrac{4}{7}$ である．よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{65 - 56\cos\theta} d\theta = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\left[f, \frac{4}{7}\right] = 2\pi i \cdot \left(z - \frac{4}{7}\right) f(z)\Big|_{z=\frac{4}{7}} = 2\pi i \cdot \frac{-1}{7i(4z-7)}\Big|_{z=\frac{4}{7}} = \frac{2}{33}\pi$$　（10 点）

(2) 【結果 2】を用いる．

$f(z)=\dfrac{11z+5}{(z^2+25)(z^2+6z+13)}$ は【結果 2】の仮定をみたし，上半平面内にある f の極は $5i,\ -3+2i$ である．よって

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{11x+5}{(x^2+25)(x^2+6x+13)}dx &= 2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,5i]+\mathrm{Res}[f,-3+2i]\big)\\ &= 2\pi i\left[(z-5i)f(z)\Big|_{z=5i}+\{z-(-3+2i)\}f(z)\Big|_{z=-3+2i}\right]\\ &= 2\pi i\left[\frac{11z+5}{(z+5i)(z^2+6z+13)}\Bigg|_{z=5i}+\frac{11z+5}{(z^2+25)\{z-(-3-2i)\}}\Bigg|_{z=-3+2i}\right]\\ &= 2\pi i\left\{\frac{5+55i}{10i\cdot(-12+30i)}+\frac{-28+22i}{(30-12i)\cdot 4i}\right\}\\ &= -\frac{13}{58}\pi \qquad \text{（15 点）}\end{aligned}$$

(3) 【結果 3】を用いる．

$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$ は【結果 3】の仮定をみたし，上半平面内にある f の極は i である．そして

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},i] &= \frac{1}{2!}\left\{(z-i)^3f(z)e^{iz}\right\}^{(2)}\Big|_{z=i}\\ &= \frac{1}{2!}\left\{(z+i)^{-3}e^{iz}\right\}^{(2)}\Big|_{z=i}\\ &= \frac{1}{2!}\cdot\frac{\{12-6i(z+i)-(z+i)^2\}e^{iz}}{(z+i)^5}\Bigg|_{z=i}\\ &= -\frac{7}{16e}i\end{aligned}$$

であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+1)^3}dx=-2\pi\mathrm{Im}\Big\{\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},i]\Big\}=-2\pi\cdot\left(-\frac{7}{16e}\right)=\frac{7\pi}{8e} \qquad \text{（10 点）}$$

※微分計算には Leibniz の公式を用いてもよい．

$$\begin{aligned}\left\{(z+i)^{-3}e^{iz}\right\}^{(2)} &= \sum_{k=0}^{2}{}_2\mathrm{C}_k\{(z+i)^{-3}\}^{(2-k)}(e^{iz})^{(k)}\\ &= {}_2\mathrm{C}_0\cdot\{(z+i)^{-3}\}''\cdot e^{iz}+{}_2\mathrm{C}_1\cdot\{(z+i)^{-3}\}'\cdot(e^{iz})'+{}_2\mathrm{C}_2\cdot(z+i)^{-3}\cdot(e^{iz})''\\ &= 1\cdot 12(z+i)^{-5}\cdot e^{iz}+2\cdot\{-3(z+i)^{-4}\}\cdot ie^{iz}+1\cdot(z+i)^{-3}\cdot(-e^{iz})\\ &= \frac{\{12-6i(z+i)-(z+i)^2\}e^{iz}}{(z+i)^5}\end{aligned}$$

(4) 【結果 4】を用いる．

$f(z)=\dfrac{1}{z^2+\pi^2}$ は【結果 4】の仮定をみたし，上半平面内にある f の極は πi である．そして

$$\mathrm{Res}[f(z)\log z,\pi i]=(z-\pi i)f(z)\log z\Big|_{z=\pi i}=\frac{\log z}{z+\pi i}\Bigg|_{z=\pi i}=\frac{\log\pi+\dfrac{\pi}{2}i}{2\pi i}=\frac{1}{4}-\frac{i}{2\pi}\log\pi$$

であるから

$$\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^2+\pi^2}dx=-\pi\mathrm{Im}\Big\{\mathrm{Res}[f(z)\log z,\pi i]\Big\}=-\pi\cdot\left(-\frac{1}{2\pi}\log\pi\right)=\frac{1}{2}\log\pi \qquad \text{（10 点）}$$

(5) 【結果 5】を用いる．

$f(z)=\dfrac{1}{(z+2)(z^2+4)}$ は【結果 5】の仮定をみたし，f の極は $-2,\ \pm 2i$ である．そして

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2,-2]+\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2,2i]+\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2,-2i]\\
&=\left.\frac{(\log z)^2}{z^2+4}\right|_{z=-2}+\left.\frac{(\log z)^2}{(z+2)(z+2i)}\right|_{z=2i}+\left.\frac{(\log z)^2}{(z+2)(z-2i)}\right|_{z=-2i}\\
&=\frac{(\log 2+\pi i)^2}{8}+\frac{\left(\log 2+\frac{\pi}{2}i\right)^2}{(2+2i)\cdot 4i}+\frac{\left(\log 2+\frac{3}{2}\pi i\right)^2}{(2-2i)\cdot(-4i)}\\
&=\frac{(\log 2+\pi i)^2}{8}+\frac{\left\{(\log 2+\pi i)-\frac{\pi}{2}i\right\}^2}{8(-1+i)}+\frac{\left\{(\log 2+\pi i)+\frac{\pi}{2}i\right\}^2}{8(-1-i)}\\
&=\frac{1}{16}\left[2(\log 2+\pi i)^2+(-1-i)\left\{(\log 2+\pi i)-\frac{\pi}{2}i\right\}^2+(-1+i)\left\{(\log 2+\pi i)+\frac{\pi}{2}i\right\}^2\right]\\
&=\frac{1}{16}\left[2(\log 2+\pi i)^2+(-1-i)\left\{(\log 2+\pi i)^2-(\log 2+\pi i)\pi i-\frac{\pi^2}{4}\right\}+(-1+i)\left\{(\log 2+\pi i)^2+(\log 2+\pi i)\pi i-\frac{\pi^2}{4}\right\}\right]\\
&=\frac{1}{16}\left[(\log 2+\pi i)^2\cdot\{2+(-1-i)+(-1+i)\}+(\log 2+\pi i)\pi i\cdot\{-(-1-i)+(-1+i)\}-\frac{\pi^2}{4}\cdot\{(-1-i)+(-1+i)\}\right]\\
&=\frac{1}{16}\left\{(\log 2+\pi i)^2\cdot 0+(\log 2+\pi i)\pi i\cdot 2i-\frac{\pi^2}{4}\cdot(-2)\right\}\\
&=\frac{1}{16}\left(-2\pi\log 2+\frac{\pi^2}{2}-2\pi^2 i\right)\\
&=-\frac{\pi}{8}\log 2+\frac{\pi^2}{32}-\frac{\pi^2}{8}i
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{\log x}{(x+2)(x^2+4)}dx &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2,-2]+\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2,2i]+\mathrm{Res}[f(z)(\log z)^2,-2i]\Big\}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{8}\log 2+\frac{\pi^2}{32}\right)\\
&= \frac{\pi}{16}\log 2-\frac{\pi^2}{64}\qquad\text{（15 点）}
\end{aligned}$$