科目名	解析学A 解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成29年6月15日(木) 3回目 (〜 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名	
試験 時間	90 分	注意 事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評 点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする．

(1) $u(x,y) = e^{-x}(x\cos y + \cos y + y\sin y - 2\sin y)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

点

(2) $u(x,y) = \dfrac{-2y^4}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{3x^3y + xy^3}{x^2+y^2}$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

点

(3) $u(x,y) = x^5 - x^4 - 2y^3 + x^2 - 3y^2$,
$v(x,y) = x^4 y + x^4 + 2xy^2 + 2xy - 2y^2$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\left(\alpha + \dfrac{i}{2}\log 13\right)$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

点

(2) 方程式 $\cos z = \sqrt{5}$ を満たす $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ を求めよ．

点

科目名	解析学A 解析学	対象	2OB	学部研究科	理学部第一部	学科専攻科		学籍番号		評点
平成 29 年 6 月 15 日 (木) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名		40
試験時間	90 分	注意事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ 106/a (14 + 5 + 5 + 6 + 10)							

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします.

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません.

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする．

(1) $u(x,y) = e^{-x}(x\cos y + \cos y + y\sin y - 2\sin y)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

uは$\mathbb{R}^2$でC^∞級で

$$u_x = -e^{-x}\cdot(x\cos y + \cos y + y\sin y - 2\sin y) + e^{-x}\cdot\cos y$$
$$= e^{-x}(-x\cos y - y\sin y + 2\sin y)$$
$$u_y = e^{-x}\{-x\sin y - \sin y + (1\cdot\sin y + y\cdot\cos y) - 2\cos y\}$$
$$= e^{-x}(-x\sin y + y\cos y - 2\cos y)$$

である．よって，C-R ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$) すなわち

$$\begin{cases} v_x = e^{-x}(x\sin y - y\cos y + 2\cos y) & \text{—①} \\ v_y = e^{-x}(-x\cos y - y\sin y + 2\sin y) & \text{—②} \end{cases}$$

をみたす v を求めればよい．

②より

$$v = e^{-x}\{-x\sin y - (-y\cos y + \sin y) - 2\cos y\} + \varphi(x)$$
$$= e^{-x}(-x\sin y + y\cos y - \sin y - 2\cos y) + \varphi(x)$$

このとき

$$v_x = -e^{-x}\cdot(-x\sin y + y\cos y - \sin y - 2\cos y) + e^{-x}\cdot(-\sin y) + \varphi'(x)$$
$$= e^{-x}(x\sin y - y\cos y + 2\cos y) + \varphi'(x)$$

となるから，①より

$\varphi'(x) = 0$ $\quad\therefore \varphi(x) = C$ (定数)

よって

$$v = e^{-x}(-x\sin y + y\cos y - \sin y - 2\cos y) + C$$

また

$$f = u + iv$$
$$= e^{-x}(x\cos y + \cos y + y\sin y - 2\sin y) + i\{e^{-x}(-x\sin y + y\cos y - \sin y - 2\cos y) + C\}$$
$$= e^{-x}\{(x+1)(\cos y - i\sin y) + (y-2)(\sin y + i\cos y)\} + iC$$
$$= e^{-x}(\cos y - i\sin y)\{(x+1) + i(y-2)\} + iC$$
$$= e^{-x-iy}(x + iy + 1 - 2i) + iC$$
$$= (z + 1 - 2i)e^{-z} + iC$$

よらに

$$f' = 1\cdot e^{-z} + (z + 1 - 2i)\cdot(-e^{-z})$$
$$= (-z + 2i)e^{-z}$$

u, v : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^∞級で

点

(2) $u(x,y) = \dfrac{-2y^4}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = \dfrac{3x^3y + xy^3}{x^2+y^2}$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

$$u_x = \frac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_y = \frac{-8x^2y^3 - 4y^5}{(x^2+y^2)^2}$$
$$v_x = \frac{3x^4y + 8x^2y^3 + y^5}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_y = \frac{3x^5 + xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

である．よって，C-R すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{3x^5 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{—①} \\ \dfrac{-8x^2y^3 - 4y^5}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{3x^4y + 8x^2y^3 + y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{—②} \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$ —③ の下で考える．

をみたすx, yの条件を求め図示すればよい．

①より $4xy = 3x^5 + xy^4$

$3x(y^4 - x^4) = 0$

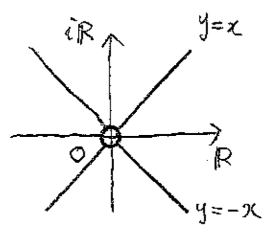
$3x(y^2 + x^2)(y + x)(y - x) = 0$

③より $x = 0 \vee y = x \vee y = -x$

②より $3y(x^4 - y^4) = 0$

③より $y = 0 \vee y = x \vee y = -x$

$\therefore$ ③ $\wedge$ $(y = x \vee y = -x)$



点

(3) $u(x,y) = x^5 - x^4 - 2y^3 + x^2 - 3y^2$,
$v(x,y) = x^4y + x^4 + 2xy^2 + 2xy - 2y^2$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

$u, v : \mathbb{R}^2$ で C^∞ 級で

$u_x = 5x^4 - 4x^3 + 2x$, $u_y = -6y^2 - 6y$

$v_x = 4x^3y + 4x^3 + 2y^2 + 2y$, $v_y = x^4 + 4xy + 2x - 4y$

である．よって，C-R すなわち

$$\begin{cases} 5x^4 - 4x^3 + 2x = x^4 + 4xy + 2x - 4y & \text{—①} \\ -6y^2 - 6y = -(4x^3y + 4x^3 + 2y^2 + 2y) & \text{—②} \end{cases}$$

①より $4x^4 - 4x^3 - 4xy + 4y = 0$ ← をみたす x, y の条件を求め図示すればよい。

$4x^3(x-1) - 4y(x-1) = 0$

$4(x-1)(x^3-y) = 0$

$\therefore x = 1 \lor y = x^3$

②より $4x^3y + 4x^3 - 4y^2 - 4y = 0$

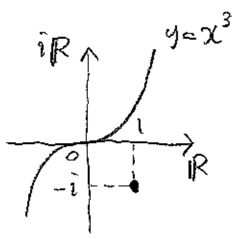
$4x^3(y+1) - 4y(y+1) = 0$

$4(y+1)(x^3-y) = 0$

$\therefore y = -1 \lor y = x^3$

よって

$(x,y) = (1,-1) \lor y = x^3$

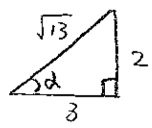


点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\left(\alpha + \dfrac{i}{2}\log 13\right)$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

$\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より



$\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

また

$\cosh\left(\frac{1}{2}\log 13\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{13} + \frac{1}{\sqrt{13}}\right) = \frac{7}{\sqrt{13}}$

$\sinh\left(\frac{1}{2}\log 13\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{13} - \frac{1}{\sqrt{13}}\right) = \frac{6}{\sqrt{13}}$

よって

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha + \tfrac{i}{2}\log 13\right) &= \sin\alpha\cosh\left(\tfrac{1}{2}\log 13\right) + i\cos\alpha\sinh\left(\tfrac{1}{2}\log 13\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}}\cdot\frac{7}{\sqrt{13}} + i\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{6}{\sqrt{13}} \\ &= \frac{14 + 18i}{13} \end{aligned}$$

点

(2) 方程式 $\cos z = \sqrt{5}$ を満たす $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ を求めよ．

$\cos x\cosh y - i\sin x\sinh y = \sqrt{5}$

$$\begin{cases} \cos x\cosh y = \sqrt{5} & \text{—①} \\ \sin x\sinh y = 0 & \text{—②} \end{cases}$$

②より $\sin x = 0 \lor \sinh y = 0$

(i) $\sin x = 0$ のとき $x = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$

①より $\cos n\pi\cosh y = \sqrt{5}$

$(-1)^n\cosh y = \sqrt{5}$

$\cosh y = (-1)^n\cdot\sqrt{5}$

$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \geq \sqrt{e^y\cdot e^{-y}} = 1$ より $n = 2m$ $(m \in \mathbb{Z})$

このとき $\cosh y = \sqrt{5}$

$\dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = \sqrt{5}$

$(e^y)^2 - 2\sqrt{5}e^y + 1 = 0$

$e^y = \sqrt{5} \pm \sqrt{5-1} = \sqrt{5} \pm 2$ (>0)

$\therefore y = \log(\sqrt{5} \pm 2)$

(ii) $\sinh y = 0$ のとき $y = 0$

①より $\cos x = \sqrt{5}$

これをみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しない

以上(i),(ii)より

$$z = 2m\pi + i\log(\sqrt{5} \pm 2) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

点