科目名	解析学A 解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号		評点
平成 29 年 8 月 3 日 (木) 3 回目 (～ 時限目)				担当	石川　学	学年		氏名		
試験 時間	60 分	注意 事項	① 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )							

平成 **29** 年度前期定期試験

※解答用紙の裏面使用可

$\boxed{1}$　$(1+\sqrt{3}\,i)^{2-\frac{i}{\pi}}$ を $a+bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ または $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$ の形にせよ．

（10 点）

$\boxed{2}$　次の複素積分の値を求めよ．（60 点）

(1) $\displaystyle\int_C \left(2\,\overline{z} + \frac{4}{3}\right) dz$　　$C : z = t^2 - it^3 \quad (-1 \leqq t \leqq 2)$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z}{\mathrm{Im} z} dz$　　$C : z = t + it^2 \quad \left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq 2\right)$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(\mathrm{Re} z)^2} dz$　　$C : z = (\log t)^2 + i \log t \quad (\sqrt{e} \leqq t \leqq e^2)$

(4) $\displaystyle\int_C |z|^2 dz$　　$C : z = t + i\cos t \quad \left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}\right)$

(5) $\displaystyle\int_C (2\,\mathrm{Re} z + \mathrm{Im} z) dz$　　$C : z = t + i \arctan t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$

$\boxed{3}$　次の複素積分の値を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする．（20 点）

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{7z-4}{(z+1)(z-3)} dz$　　(2) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{3z-8}{z(z-2)(z+4)} dz$

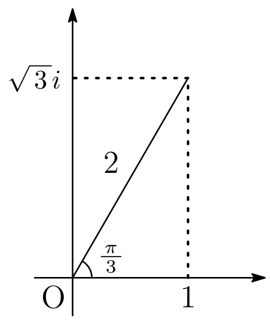
(3) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{-2z+5}{(z+1)(3z-7)(z-6)} dz$　　(4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^4(z-2)} dz$

$\boxed{1}$ $(1+\sqrt{3}\,i)^{2-\frac{i}{\pi}}$ を $a+bi$ $(a,b\in\mathbb{R})$ または $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ \theta\in\mathbb{R})$ の形にせよ．

（10 点）

解答

$$\begin{aligned}\left(2-\frac{i}{\pi}\right)\log(1+\sqrt{3}\,i) &= \left(2-\frac{i}{\pi}\right)\left\{\log 2+i\left(\frac{\pi}{3}+2n\pi\right)\right\}\\ &= 2\log 2+\frac{1}{3}+2n+i\left(-\frac{1}{\pi}\log 2+\frac{2}{3}\pi+4n\pi\right) \quad (n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$



であるから

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}\,i)^{2-\frac{i}{\pi}} &= e^{(2-\frac{i}{\pi})\log(1+\sqrt{3}\,i)}\\ &= e^{\log 4+\frac{1}{3}+2n+i(-\frac{1}{\pi}\log 2+\frac{2}{3}\pi+4n\pi)}\\ &= 4e^{\frac{1}{3}+2n}\left\{\cos\left(-\frac{1}{\pi}\log 2+\frac{2}{3}\pi+4n\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{\pi}\log 2+\frac{2}{3}\pi+4n\pi\right)\right\}\\ &= 4e^{\frac{1}{3}+2n}\left\{\cos\left(-\frac{1}{\pi}\log 2+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{1}{\pi}\log 2+\frac{2}{3}\pi\right)\right\} \quad (n\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 次の複素積分の値を求めよ． （60 点）

(1) $\displaystyle\int_C\left(2\,\overline{z}+\frac{4}{3}\right)dz$ $\qquad C: z=t^2-it^3 \quad (-1\leqq t\leqq 2)$

(2) $\displaystyle\int_C\frac{z}{\mathrm{Im}z}dz$ $\qquad C: z=t+it^2 \quad \left(\frac{1}{2}\leqq t\leqq 2\right)$

(3) $\displaystyle\int_C\frac{1}{(\mathrm{Re}z)^2}dz$ $\qquad C: z=(\log t)^2+i\log t \quad \left(\sqrt{e}\leqq t\leqq e^2\right)$

(4) $\displaystyle\int_C|z|^2dz$ $\qquad C: z=t+i\cos t \quad \left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

(5) $\displaystyle\int_C(2\,\mathrm{Re}z+\mathrm{Im}z)dz$ $\qquad C: z=t+i\arctan t \quad (0\leqq t\leqq 1)$

解答

(1) $C: z=t^2-it^3 \quad (-1\leqq t\leqq 2)$ のとき $\dfrac{dz}{dt}=2t-3it^2$ であるから

$$\begin{aligned}\int_C\left(2\,\overline{z}+\frac{4}{3}\right)dz &= \int_{-1}^{2}\left\{2(t^2+it^3)+\frac{4}{3}\right\}\cdot(2t-3it^2)dt\\ &= \int_{-1}^{2}\left\{6t^5+4t^3+\frac{8}{3}t+i(-2t^4-4t^2)\right\}dt\\ &= \left[t^6+t^4+\frac{4}{3}t^2+i\left(-\frac{2}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3\right)\right]_{-1}^{2}\\ &= (64-1)+(16-1)+\frac{4}{3}(4-1)+i\left[-\frac{2}{5}\{32-(-1)\}-\frac{4}{3}\{8-(-1)\}\right]\\ &= 82-\frac{126}{5}i\end{aligned}$$

(2) $C: z = t + it^2 \quad \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2\right)$ のとき $\dfrac{dz}{dt} = 1 + 2it$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z}{\mathrm{Im} z} dz &= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{t + it^2}{t^2} \cdot (1 + 2it) dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\frac{1}{t} - 2t + 3i\right) dt \\
&= \Big[\log t - t^2 + 3it\Big]_{\frac{1}{2}}^{2} \\
&= \left(\log 2 - \log \frac{1}{2}\right) - \left(4 - \frac{1}{4}\right) + 3i\left(2 - \frac{1}{2}\right) \\
&= 2\log 2 - \frac{15}{4} + \frac{9}{2} i
\end{aligned}$$

(3) $C: z = (\log t)^2 + i \log t \quad \left(\sqrt{e} \leqq t \leqq e^2\right)$ のとき $\dfrac{dz}{dt} = 2\log t \cdot \dfrac{1}{t} + \dfrac{i}{t}$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{(\mathrm{Re} z)^2} dz &= \int_{\sqrt{e}}^{e^2} \frac{1}{(\log t)^4} \cdot \left(2\log t \cdot \frac{1}{t} + \frac{i}{t}\right) dt \\
&= \int_{\sqrt{e}}^{e^2} \left\{2(\log t)^{-3} \cdot \frac{1}{t} + i(\log t)^{-4} \cdot \frac{1}{t}\right\} dt \\
&= \left[-(\log t)^{-2} - \frac{i}{3}(\log t)^{-3}\right]_{\sqrt{e}}^{e^2} \\
&= -\left(\frac{1}{4} - 4\right) - \frac{i}{3}\left(\frac{1}{8} - 8\right) \\
&= \frac{15}{4} + \frac{21}{8} i
\end{aligned}$$

(4) $C: z = t + i\cos t \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき $\dfrac{dz}{dt} = 1 - i\sin t$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_C |z|^2 dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 + \cos^2 t) \cdot (1 - i\sin t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{t^2 + \cos^2 t + i(-t^2 \sin t - \cos^2 t \sin t)\} dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[t^2 + \frac{1 + \cos 2t}{2} + i\{-t^2 \sin t + \cos^2 t \cdot (-\sin t)\}\right] dt \\
&= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + i\left\{-(-t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t) + \frac{1}{3}\cos^3 t\right\}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{24} + \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(0 - 0)\right\} + i\left\{\left(\frac{\pi^2}{4} \cdot 0 - 0 \cdot 1\right) - 2\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \cdot 0\right) - 2(0 - 1) + \frac{1}{3}(0 - 1)\right\} \\
&= \frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{4} + \left(-\pi + \frac{5}{3}\right) i
\end{aligned}$$

(5) $C : z = t + i\arctan t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ のとき $\dfrac{dz}{dt} = 1 + \dfrac{i}{1+t^2}$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_C (2\,\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}z)dz &= \int_0^1 (2t + \arctan t)\cdot\left(1 + \frac{i}{1+t^2}\right)dt \\
&= \int_0^1 \left\{2t + \arctan t + i\left(\frac{2t}{1+t^2} + \arctan t \cdot \frac{1}{1+t^2}\right)\right\}dt \\
&= \left[t^2 + \left\{t\arctan t - \frac{1}{2}\log(1+t^2)\right\} + i\left\{\log(1+t^2) + \frac{1}{2}(\arctan t)^2\right\}\right]_0^1 \\
&= 1 + \left(1\cdot\frac{\pi}{4} - 0\cdot 0\right) - \frac{1}{2}(\log 2 - 0) + i\left\{(\log 2 - 0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0\right)\right\} \\
&= 1 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 + \left(\log 2 + \frac{\pi^2}{32}\right)i
\end{aligned}$$

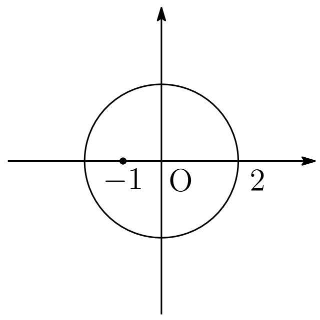
$\boxed{3}$ 次の複素積分の値を求めよ．ただし，積分経路は正の向きとする． （20 点）

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{7z-4}{(z+1)(z-3)}dz$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{3z-8}{z(z-2)(z+4)}dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{-2z+5}{(z+1)(3z-7)(z-6)}dz$ (4) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^4(z-2)}dz$

解答

(1) $\dfrac{7z-4}{(z+1)(z-3)} = \dfrac{A}{z+1} + \dfrac{B}{z-3}$ ……① と分解できるから



$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{7z-4}{(z+1)(z-3)}dz &= \int_{|z|=2} \left(\frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-3}\right)dz \\
&= A\cdot 2\pi i
\end{aligned}$$

である．ここで，① の分母をはらうと

$7z - 4 = A(z-3) + B(z+1)$

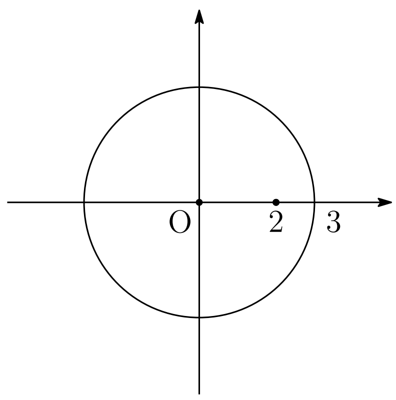
であるから，$z = -1$ を代入して

$-11 = -4A \qquad \therefore \quad A = \dfrac{11}{4}$

よって

$$\int_{|z|=2} \frac{7z-4}{(z+1)(z-3)}dz = \frac{11}{4}\cdot 2\pi i = \frac{11}{2}\pi i$$

(2) $\dfrac{3z-8}{z(z-2)(z+4)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z-2} + \dfrac{C}{z+4}$ ……① と分解できるから



$$\begin{aligned}
\int_{|z|=3} \frac{3z-8}{z(z-2)(z+4)}dz &= \int_{|z|=3} \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z+4}\right)dz \\
&= (A+B)\cdot 2\pi i
\end{aligned}$$

である．ここで，① の分母をはらうと

$3z - 8 = A(z-2)(z+4) + Bz(z+4) + Cz(z-2)$

であるから，$z = -4$ を代入して

$-20 = 24C \qquad \therefore \quad C = -\dfrac{5}{6}$

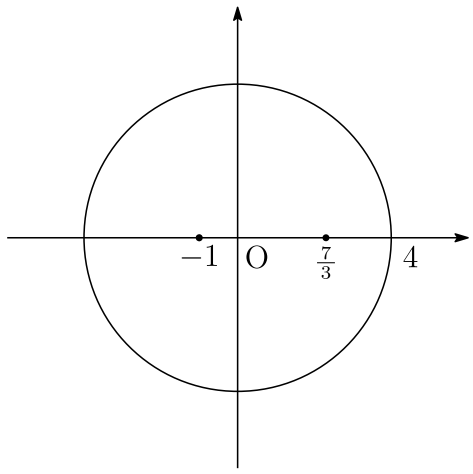
z^2 の係数を比較して

$0 = A + B + C \qquad \therefore \quad A + B = -C = \dfrac{5}{6}$

よって

$$\int_{|z|=3} \frac{3z-8}{z(z-2)(z+4)}dz = \frac{5}{6}\cdot 2\pi i = \frac{5}{3}\pi i$$

(3) $\dfrac{-2z+5}{(z+1)(3z-7)(z-6)} = \dfrac{A}{z+1} + \dfrac{B}{3z-7} + \dfrac{C}{z-6}$ ……① と分解できるから



$$\begin{aligned}\int_{|z|=4} \frac{-2z+5}{(z+1)(3z-7)(z-6)}dz &= \int_{|z|=4} \left(\frac{A}{z+1} + \frac{\frac{B}{3}}{z-\frac{7}{3}} + \frac{C}{z-6} \right) dz \\ &= \left(A + \frac{B}{3} \right) \cdot 2\pi i\end{aligned}$$

である．ここで，① の分母をはらうと

$$-2z+5 = A(3z-7)(z-6) + B(z+1)(z-6) + C(z+1)(3z-7)$$

であるから，$z=6$ を代入して

$$-7 = 77C \qquad \therefore \quad C = -\frac{1}{11}$$

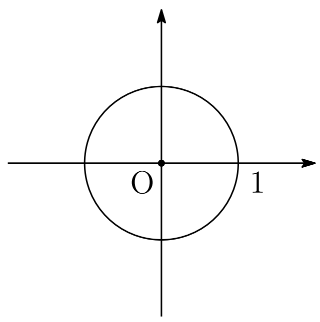
z^2 の係数を比較して

$$0 = 3A + B + 3C \qquad \therefore \quad A + \frac{B}{3} = -C = \frac{1}{11}$$

よって

$$\int_{|z|=4} \frac{-2z+5}{(z+1)(3z-7)(z-6)}dz = \frac{1}{11} \cdot 2\pi i = \frac{2}{11}\pi i$$

(4) $\dfrac{1}{z^4(z-2)} = \dfrac{A}{z} + \dfrac{B}{z^2} + \dfrac{C}{z^3} + \dfrac{D}{z^4} + \dfrac{E}{z-2}$ ……① と分解できるから



$$\begin{aligned}\int_{|z|=1} \frac{1}{z^4(z-2)}dz &= \int_{|z|=1} \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^4} + \frac{E}{z-2} \right) dz \\ &= A \cdot 2\pi i\end{aligned}$$

である．ここで，① の分母をはらうと

$$1 = Az^3(z-2) + Bz^2(z-2) + Cz(z-2) + D(z-2) + Ez^4$$

であるから，$z=2$ を代入して

$$1 = 16E \qquad \therefore \quad E = \frac{1}{16}$$

z^4 の係数を比較して

$$0 = A + E \qquad \therefore \quad A = -E = -\frac{1}{16}$$

よって

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^4(z-2)}dz = -\frac{1}{16} \cdot 2\pi i = -\frac{\pi}{8}i$$