科目名	解析学A 解析学	対象	2OB	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科		学籍 番号	
平成 30 年 6 月 7 日 (木) 3回目 (～ 時限目)				担当	石川 学	学年		氏名	
試験 時間	90 分	注意 事項	1. 筆記用具以外持込不可 ~~2. 下記のみ参照・持込可~~ ( )						

評点

★不正行為および疑わしき行為をしないようにお願いします．

★解答はすべて記述式とし，答えのみは正解としません．

$\boxed{1}$ 以下において $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ とする．ただし，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ で u, v は実数値とする．

(1) $u(x,y) = e^{-y}(4x\cos x - 4y\sin x - \sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

点

(2) $u(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2 + y}{x^2 + y^2}$，$v(x,y) = \dfrac{2xy - x}{x^2 + y^2}$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

点

(3) $u(x,y) = x^4 + 3x^2y^2 + 6xy^2 - 3x^2$,
$v(x,y) = -2x^3y - 6x^2y + 6y$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

点

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\left(\alpha - \dfrac{i}{2}\log 5\right)$ を $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha = \dfrac{6}{7}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

点

(2) 方程式 $\cos z = \dfrac{3}{2}$ を満たす $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ を求めよ．

点

$\boxed{1}$ 以下において $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とする．ただし，$z=x+iy\ (x,y\in\mathbb{R})$ で u,v は実数値とする．

(1) $u(x,y)=e^{-y}(4x\cos x-4y\sin x-\sin x)$ のとき，f が $\mathbb{C}$ で正則となるように v を定めよ．またそのときの f と f' を z で表せ．

(2) $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2+y}{x^2+y^2},\ v(x,y)=\dfrac{2xy-x}{x^2+y^2}$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

(3) $u(x,y)=x^4+3x^2y^2+6xy^2-3x^2,\ v(x,y)=-2x^3y-6x^2y+6y$ のとき，f が微分可能である点全体を複素平面に図示せよ．

解答

(1) u は $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級で

$$\begin{aligned} u_x &= e^{-y}\{4\cdot\cos x+4x\cdot(-\sin x)-4y\cos x-\cos x\} \\ &= e^{-y}(3\cos x-4x\sin x-4y\cos x) \\ u_y &= -e^{-y}\cdot(4x\cos x-4y\sin x-\sin x)+e^{-y}\cdot(-4\sin x) \\ &= e^{-y}(-4x\cos x+4y\sin x-3\sin x) \end{aligned}$$

である．よって，C-R ($u_x=v_y,\ u_y=-v_x$) すなわち

$$\begin{cases} v_x=e^{-y}(4x\cos x-4y\sin x+3\sin x) & \cdots\cdots① \\ v_y=e^{-y}(-4x\sin x-4y\cos x+3\cos x) & \cdots\cdots② \end{cases}$$

をみたす v を求めればよい．① より

$$\begin{aligned} v &= \int e^{-y}(4x\cos x-4y\sin x+3\sin x)dx \\ &= e^{-y}\{4(x\sin x+\cos x)+4y\cos x-3\cos x\}+\varphi(y) \\ &= e^{-y}(4x\sin x+4y\cos x+\cos x)+\varphi(y) \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} v_y &= -e^{-y}\cdot(4x\sin x+4y\cos x+\cos x)+e^{-y}\cdot 4\cos x+\varphi'(y) \\ &= e^{-y}(-4x\sin x-4y\cos x+3\cos x)+\varphi'(y) \end{aligned}$$

となるから，② と比較して

$$\varphi'(y)=0 \qquad \therefore\quad \varphi(y)=C\text{（定数）}$$

よって

$$v=e^{-y}(4x\sin x+4y\cos x+\cos x)+C \qquad (C\text{ は定数})$$

また

$$\begin{aligned} f &= u+iv \\ &= e^{-y}(4x\cos x-4y\sin x-\sin x)+i\{e^{-y}(4x\sin x+4y\cos x+\cos x)+C\} \\ &= e^{-y}(4x\cos x-4y\sin x-\sin x+4ix\sin x+4iy\cos x+i\cos x)+iC \\ &= e^{-y}\{4x(\cos x+i\sin x)+4iy(\cos x+i\sin x)+i(\cos x+i\sin x)\}+iC \\ &= e^{-y}(\cos x+i\sin x)(4x+4iy+i)+iC \\ &= e^{-y+ix}(4x+4iy+i)+iC \\ &= \{4(x+iy)+i\}e^{i(x+iy)}+iC \\ &= (4z+i)e^{iz}+iC \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} f' &= 4\cdot e^{iz}+(4z+i)\cdot ie^{iz} \\ &= (4iz+3)e^{iz} \end{aligned}$$

（
v の $e^{-y}(4x\sin x+4y\cos x+\cos x)$ に 5 点，C がちゃんと導けて 2 点

f の $(4z+i)e^{iz}$ に 3 点，iC に 2 点（減点のみ）

f' に 2 点

合計 14 点
）

(2) u, v は $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で C^∞ 級で

$$u_x = \frac{2x \cdot (x^2+y^2) - (x^2-y^2+y) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{(-2y+1) \cdot (x^2+y^2) - (x^2-y^2+y) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-4x^2y+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_x = \frac{(2y-1) \cdot (x^2+y^2) - (2xy-x) \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x^2y+2y^3+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$v_y = \frac{2x \cdot (x^2+y^2) - (2xy-x) \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3-2xy^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

である．よって，C-R $(u_x = v_y,\ u_y = -v_x)$ すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{4xy^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{2x^3-2xy^2+2xy}{(x^2+y^2)^2} & \cdots\cdots① \\ \dfrac{-4x^2y+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{-2x^2y+2y^3+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \cdots\cdots② \end{cases}$$

をみたす x, y の条件を求め図示すればよい．以下 $(x, y) \neq (0, 0)$ ……③ のもとで考える．

① より

$$4xy^2 - 2xy = 2x^3 - 2xy^2 + 2xy$$

$$2x^3 - 6xy^2 + 4xy = 0$$

$$2x(x^2 - 3y^2 + 2y) = 0$$

$\therefore$ $x = 0$ または $x^2 - 3y^2 + 2y = 0$ ……④

② より

$$-4x^2y + x^2 - y^2 = -(-2x^2y + 2y^3 + x^2 - y^2)$$

$$6x^2y - 2y^3 - 2x^2 + 2y^2 = 0$$

$\therefore$ $3x^2y - y^3 - x^2 + y^2 = 0$ ……⑤

(i) $x = 0$ のとき，⑤ より

$$-y^3 + y^2 = 0$$

$$y^2(-y+1) = 0$$

$\therefore$ $y = 0$ または $y = 1$

③ より　$(x, y) = (0, 1)$

(ii) ④ のとき，⑤ より

$$3(3y^2-2y)y - y^3 - (3y^2-2y) + y^2 = 0$$

$$8y^3 - 8y^2 + 2y = 0$$

$$2y(2y-1)^2 = 0$$

$\therefore$ $y = 0,\ \dfrac{1}{2}$

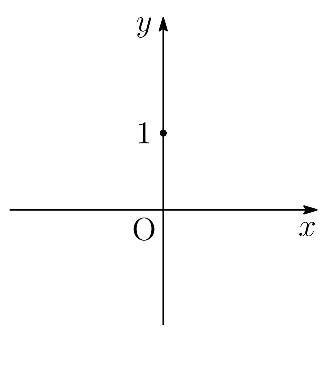
・$y = 0$ のとき，④ より $x = 0$ となるが，③ をみたさないから不適．

・$y = \dfrac{1}{2}$ のとき，④ より $x^2 = -\dfrac{1}{4} < 0$ となり不適．

以上 (i),(ii) より，求める x, y の条件は

$$(x, y) = (0, 1)$$

よって，求める点全体は図の点になる．



（完全正解で 5 点
余計なものがあるとき 2 点減点）

(3) u, v は $\mathbb{R}^2$ で C^∞ 級で

$$u_x = 4x^3 + 6xy^2 + 6y^2 - 6x$$
$$u_y = 6x^2y + 12xy$$
$$v_x = -6x^2y - 12xy$$
$$v_y = -2x^3 - 6x^2 + 6$$

である．よって，C-R $(u_x = v_y,\ u_y = -v_x)$ すなわち

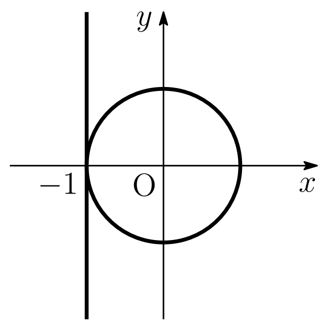
$$\begin{cases} 4x^3 + 6xy^2 + 6y^2 - 6x = -2x^3 - 6x^2 + 6 & \cdots\cdots ① \\ 6x^2y + 12xy = -(-6x^2y - 12xy) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

をみたす x, y の条件を求め図示すればよい．

② は常に成り立つ．

① より

$$6x^3 + 6xy^2 - 6x + 6x^2 + 6y^2 - 6 = 0$$
$$6x(x^2 + y^2 - 1) + 6(x^2 + y^2 - 1) = 0$$
$$6(x+1)(x^2 + y^2 - 1) = 0$$
$$\therefore \quad x = -1 \quad \text{または} \quad x^2 + y^2 = 1$$



よって，求める点全体は図の太線部分になる．

$$\left(\begin{array}{l} \text{完全正解で 5 点} \\ x = -1 \text{ に 2 点，} x^2 + y^2 = 1 \text{ に 3 点} \\ \text{これらが両方あってさらに余計なものがあるとき 2 点減点} \end{array}\right)$$

$\boxed{2}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\sin\left(\alpha - \dfrac{i}{2}\log 5\right)$ を $a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$ の形にせよ．ただし，α は $\tan\alpha = \dfrac{6}{7}\ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

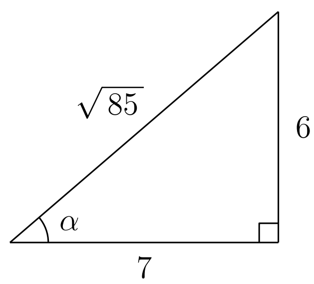
(2) 方程式 $\cos z = \dfrac{3}{2}$ を満たす $z = x + iy\ (x, y \in \mathbb{R})$ を求めよ．

解答

(1) $\tan\alpha = \dfrac{6}{7}\ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$

より

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{85}}, \quad \sin\alpha = \frac{6}{\sqrt{85}}$$



また，$e^{\log\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ であるから

$$\cosh\left(\frac{1}{2}\log 5\right) = \cosh(\log\sqrt{5}) = \frac{e^{\log\sqrt{5}} + e^{-\log\sqrt{5}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}$$
$$\sinh\left(\frac{1}{2}\log 5\right) = \sinh(\log\sqrt{5}) = \frac{e^{\log\sqrt{5}} - e^{-\log\sqrt{5}}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって

$$\begin{aligned} \sin\left(\alpha - \frac{i}{2}\log 5\right) &= \sin\alpha\cosh\left(\frac{1}{2}\log 5\right) - i\cos\alpha\sinh\left(\frac{1}{2}\log 5\right) \\ &= \frac{6}{\sqrt{85}}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}} - i\cdot\frac{7}{\sqrt{85}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{18 - 14i}{5\sqrt{17}} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{答えの実部と虚部に各 3 点の合計 6 点} \\ \text{答えの両方が間違っていたとき，} \cos\alpha \text{ と } \sin\alpha \text{ の値両方で 1 点，} \cosh\left(\dfrac{1}{2}\log 5\right) \text{ と } \sinh\left(\dfrac{1}{2}\log 5\right) \text{ の値に各 1 点} \end{array}\right)$$

(2) $\cos z = \dfrac{3}{2},\ z = x + iy\ (x, y \in \mathbb{R})$ より　　$\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = \dfrac{3}{2}$

よって

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = \dfrac{3}{2} & \cdots\cdots① \\ \sin x \sinh y = 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

② より　　$\sin x = 0$　または　$\sinh y = 0$

(i) $\sin x = 0$ のとき　　$x = n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$

① より

$$\cos n\pi \cosh y = \frac{3}{2}$$

$$(-1)^n \cdot \cosh y = \frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad \cosh y = (-1)^n \cdot \frac{3}{2}$$

$\cosh y = \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} \geqq \sqrt{e^y \cdot e^{-y}} = 1$ より　　$n = 2m\ (m \in \mathbb{Z})$

このとき

$$\cosh y = \frac{3}{2}$$

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(e^y)^2 - 3e^y + 1 = 0$$

$$e^y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\ (> 0)$$

$$\therefore\quad y = \log \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(ii) $\sinh y = 0$ のとき　　$y = 0$

① より　　$\cos x = \dfrac{3}{2}\ (> 1)$

これをみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しない．

以上 (i),(ii) より

$$z = 2m\pi + i \log \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

(
z の $2m\pi,\ \log \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ に各 3 点，π 忘れ，$\pm$ なしは各 1 点減点

z の $i,\ (m \in \mathbb{Z})$ は各 1 点（減点のみ）

$\sinh y = 0$ のとき，$\cos x = \dfrac{3}{2}$ をみたす $x \in \mathbb{R}$ は存在しないと述べて 2 点

合計 10 点
)