複素数平面

§1.　複素数平面

1．定義

2 乗して -1 になるものを i で表し，これを**虚数単位**という．

$$i^2 = -1$$

これを用いて，$a+bi$（a, b は実数）の形で表されるものを**複素数**といい，a, b をそれぞれこの複素数の**実部**，**虚部**という．特に，$b=0$ のとき $a+0i$ は実数 a を表す．また，$b \neq 0$ のとき $a+bi$ を**虚数**といい，$a=0,\ b\neq 0$ のとき $0+bi=bi$ を**純虚数**という．そして，複素数 z の実部，虚部をそれぞれ $\mathrm{Re}z,\ \mathrm{Im}z$ で表す．

2．負の数の平方根

$a>0$ のとき $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\,i$ と定める．

※根号の中が負の数のときは，虚数単位 i を用いた形に書き換えて計算を行う．特に，$a, b > 0$ のとき

$$\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} = (\sqrt{a}\,i)\cdot(\sqrt{b}\,i) = \sqrt{ab}\cdot i^2 = -\sqrt{ab}$$

となることに注意する．

3．複素数の相等

a, b, c, d が実数のとき

$$a+bi = c+di \quad\Longleftrightarrow\quad a=c \text{ かつ } b=d$$

と定める．特に

$$a+bi=0 \quad\Longleftrightarrow\quad a=b=0$$

である．

4．複素数の四則演算

a, b, c, d が実数のとき

(1) 加法　$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

(2) 減法　$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

(3) 乗法　$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

(4) 除法　$\dfrac{a+bi}{c+di} = \dfrac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \quad (c+di\neq 0)$

と定める．

※上の四則演算は定義であるが，実際は i についての式とみて整理し，i^2 が現れたらそれを -1 で置き換えることで計算していけばよい．

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} \quad (c+di\neq 0)$$

※ α, β を複素数とするとき，実数の場合と同様に次が成り立つ．

$$\alpha\beta = 0 \iff \alpha = 0 \text{ または } \beta = 0$$

5．共役複素数

$z = a + bi$（a, b は実数）に対して，$\overline{z} = a - bi$ を z の**共役複素数**という．複素数 z_1, z_2, z に対して，次が成り立つ．

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$　（複号同順）　　(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$　　(4) $\overline{(\overline{z})} = z$

(5) z：実数 $\iff \overline{z} = z$　　(6) z：純虚数 $\iff \overline{z} = -z$ かつ $z \neq 0$

証明

$z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i,\ z = a + bi$（$a_1, b_1, a_2, b_2, a, b$ は実数）とする．

(1) 以下，複号同順とする．

$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$

であるから　$\overline{z_1 \pm z_2} = (a_1 \pm a_2) - i(b_1 \pm b_2)$

一方　$\overline{z_1} \pm \overline{z_2} = (a_1 - b_1 i) \pm (a_2 - b_2 i) = (a_1 \pm a_2) - (b_1 \pm b_2)i$

よって　$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

(2) $z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

であるから　$\overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

一方　$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

よって　$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(3) $z_3 = \dfrac{z_1}{z_2}$ とおくと $z_1 = z_2 z_3$ であるから，(2) より　$\overline{z_1} = \overline{z_2}\,\overline{z_3}$　　$\therefore\ \overline{z_3} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

よって　$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(4) $\overline{(\overline{z})} = \overline{a - bi} = a + bi = z$

(5) $z = a + bi,\ \overline{z} = a - bi$ の辺々を足し引きすると

$$a = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \cdots\cdots①, \quad b = \frac{z - \overline{z}}{2i} \quad \cdots\cdots②$$

であることがわかる．よって，② より

$$z\text{：実数} \iff b = 0 \iff \overline{z} = z$$

(6) ① より

$$z\text{：純虚数} \iff a = 0 \text{ かつ } b \neq 0 \iff \overline{z} = -z \text{ かつ } z \neq 0 \quad \blacksquare$$

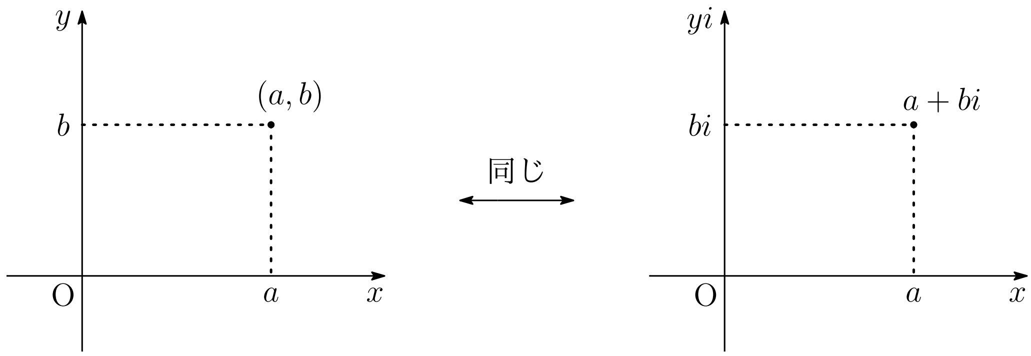
※ ①, ② より，複素数 z に対して

$$\mathrm{Re}z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

となる．

6．複素数平面

複素数 $a+bi$（a,b は実数）と座標平面上の点 (a,b) は 1 対 1 に対応する．そこで，点に複素数のラベルを貼ったときの平面を**複素数平面**（正しくは**複素平面**）という．

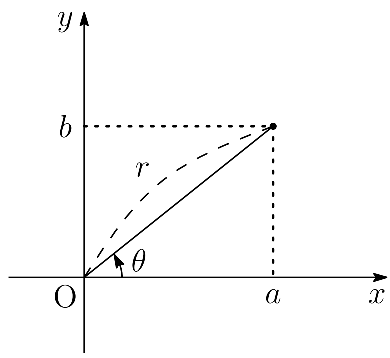


（座標平面）　（複素数平面）

また，点 (a,b) に対して，右図のように r,θ を定めれば，複素数 $z=a+bi$ は

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

とかける．ただし，$z=0$ $(r=0)$ のときは θ は定めない．これを z の**極形式**という．そして，r,θ をそれぞれ z の**絶対値**，**偏角**といい



$$r=|z|,\quad \theta=\arg z$$

とかく．偏角は一般角で考えるが，$0\leqq\theta<2\pi$ や $-\pi<\theta\leqq\pi$ とすることもある．複素数 z,z_1,z_2 に対して，次が成り立つ．

(1) $z\overline{z}=\overline{z}z=|z|^2$

(2) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad \arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2$

(3) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|},\quad \arg\dfrac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$

証明

$z=a+bi$（a,b は実数）とし，$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ を極形式とする．

(1) $z\overline{z}=\overline{z}z=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=|z|^2$

(2)
$$\begin{aligned}z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\ &= r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}\\ &= r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}\end{aligned}$$

であるから

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2|,\quad \arg z_1z_2=\theta_1+\theta_2=\arg z_1+\arg z_2$$

(3) $\dfrac{1}{z_2}=\dfrac{\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\dfrac{r_2(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{{r_2}^2}=\dfrac{1}{r_2}\{\cos(-\theta_2)+i\sin(-\theta_2)\}$

であるから，$\dfrac{z_1}{z_2}=z_1\cdot\dfrac{1}{z_2}$ とみれば

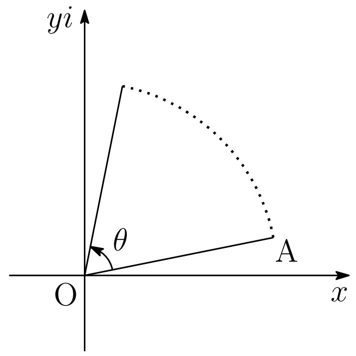
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=r_1\cdot\frac{1}{r_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\arg\frac{z_1}{z_2}=\theta_1+(-\theta_2)=\theta_1-\theta_2=\arg z_1-\arg z_2 \quad \blacksquare$$

※実数 x に対しては $|x|^2=x^2$ が成り立つが，虚数 z に対しては $|z|^2=z^2$ が成り立たないことに注意する．

7．点の回転

複素数平面上の点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を原点 O のまわりに θ 回転した点の表す複素数を z とすると



$$z=\alpha(\cos\theta+i\sin\theta)$$

である．実際，$\cos\theta+i\sin\theta$ の絶対値は 1，偏角は θ であるから

$$|z|=|\alpha|\cdot1=|\alpha|$$

$$\arg z=\arg\alpha+\theta$$

となり，絶対値は変えず偏角だけ θ 増えていることがわかる．一般に，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ を点 $\mathrm{B}(\beta)$ のまわりに θ 回転した点の表す複素数を γ とすると

$$\gamma-\beta=(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

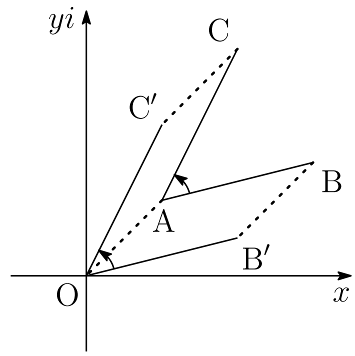
であるから

$$\gamma=\beta+(\alpha-\beta)(\cos\theta+i\sin\theta)$$

である．

8．3 点の位置関係

複素数平面上の異なる 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ に対して，線分 AB から線分 AC への角は



$$\arg\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$$

である．これは，図において $\mathrm{B}'(\beta-\alpha)$，$\mathrm{C}'(\gamma-\alpha)$ であることを考えれば明らかである．これより，次が成り立つ．

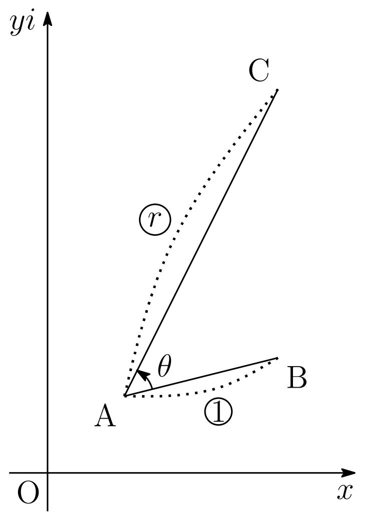
(1) 3 点 A,B,C が同一直線上にある

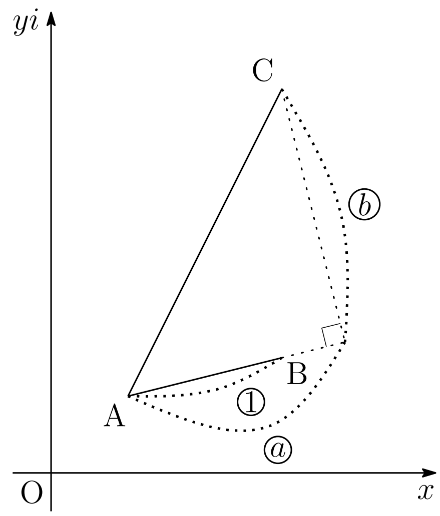
$\iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は実数

(2) $\mathrm{AB}\perp\mathrm{AC} \iff \dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数

※複素数平面上の異なる 3 点 A(α), B(β), C(γ) の相対的位置関係が $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を求めるとわかるということである．具体的には

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき　　　　(2) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=a+bi$ のとき





（a, b は負であれば反対方向にとる）

9. de Moivre（ド・モアブル）の定理

整数 n に対して

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

が成り立つ．

証明

$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ ……① とする．

(i) $(\cos\theta+i\sin\theta)^0=1$, $\cos 0\theta+i\sin 0\theta=1$ であるから，$n=0$ のとき ① は成り立つ．

(ii) $n=k$ $(k\geqq 0)$ のとき ① が成り立つと仮定すると

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

このとき，6 (2) より

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\\ &= \cos(k\theta+\theta)+i\sin(k\theta+\theta)\\ &= \cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

となるから，$n=k+1$ のときも ① が成り立つ．

以上 (i),(ii) より，すべての負でない整数に対して ① が成り立つ．

一方，n が負の整数のときは $n=-m$（m は正の整数）とかけるから，6 (3) より

$$
\begin{aligned}
(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m} \\
&= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} \\
&= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \\
&= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta) \\
&= \cos n\theta + i\sin n\theta
\end{aligned}
$$

よって，定理は証明された． ∎

10. de Moivre の定理の応用例

(1) $\theta \neq 2m\pi$（m は整数）とする．$\cos\theta + i\sin\theta \neq 1$ であるから

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta + i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta &= \sum_{k=1}^{n}(\cos k\theta + i\sin k\theta) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(\cos\theta + i\sin\theta)^k \\
&= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)\{1-(\cos\theta + i\sin\theta)^n\}}{1-(\cos\theta + i\sin\theta)} \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\frac{1-\cos n\theta - i\sin n\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta} \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\frac{2\sin^2\dfrac{n\theta}{2} - 2i\sin\dfrac{n\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}}{2\sin^2\dfrac{\theta}{2} - 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\frac{-2i^2\sin^2\dfrac{n\theta}{2} - 2i\sin\dfrac{n\theta}{2}\cos\dfrac{n\theta}{2}}{-2i^2\sin^2\dfrac{\theta}{2} - 2i\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}} \\
&= (\cos\theta + i\sin\theta)\cdot\frac{-2i\sin\dfrac{n\theta}{2}\left(\cos\dfrac{n\theta}{2} + i\sin\dfrac{n\theta}{2}\right)}{-2i\sin\dfrac{\theta}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{(\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\dfrac{n\theta}{2} + i\sin\dfrac{n\theta}{2}\right)}{\cos\dfrac{\theta}{2} + i\sin\dfrac{\theta}{2}} \\
&= \frac{\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\left\{\cos\left(\theta + \frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{n\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cdot\left\{\cos\frac{(n+1)\theta}{2} + i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

実部，虚部をそれぞれ比較すると

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta = \frac{\cos\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}},\quad \sum_{k=1}^{n}\sin k\theta = \frac{\sin\dfrac{(n+1)\theta}{2}\sin\dfrac{n\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{7}\right)^k\cos\frac{k\pi}{2}+i\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{7}\right)^k\sin\frac{k\pi}{2} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{7}\right)^k\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{7}\right)^k\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^k\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5i}{7}\right)^k\end{aligned}$$

である．ここで，$\left|\dfrac{5i}{7}\right| = \dfrac{5}{7} < 1$ であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5i}{7}\right)^n = \frac{\dfrac{5i}{7}}{1-\dfrac{5i}{7}} = \frac{5i}{7-5i} = \frac{5i(7+5i)}{49+25} = \frac{-25+35i}{74}$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2}+i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{-25+35i}{74}$$

となるから，実部と虚部をそれぞれ比較すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n\cos\frac{n\pi}{2} = -\frac{25}{74},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{35}{74}$$

※実数の範囲で求める方法は，授業プリント【練習問題 2】(24),(25) を参照してほしい．