

幾何一演習前期試験 2003 年 7 月 16 日実施	学籍番号	氏 名

- 1 (1) P, Q, R を文とするととき,

$$(P \Rightarrow (Q \text{ or } R)) \iff ((P \& (\text{not} Q)) \Rightarrow R)$$

が恒真文であることを, 下の真理表を完成させることにより示せ.

P	Q	R	$(P \Rightarrow (Q \text{ or } R))$	$\iff$	$((P \& (\text{not} Q)) \Rightarrow R)$
T	T	T	☐	☐	☐
T	T	F	☐	☐	☐
T	F	T	☐	☐	☐
T	F	F	☐	☐	☐
F	T	T	☐	☐	☐
F	T	F	☐	☐	☐
F	F	T	☐	☐	☐
F	F	F	☐	☐	☐
			②	①	⑤
					③
					④

- (2) 集合 A, B, C に対して

$$A \subset B \cup C \iff A \setminus B \subset C$$

が成り立つことを, (1) で示した恒真文を用いて示せ.

2 (1) 次の各写像に対して, 下の表を完成させよ.

$$\begin{array}{ccc} f_1 & : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f_2 & : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & e^{-x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f_3 & : (0, \infty) & \longrightarrow (0, \frac{\pi}{2}) \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \arctan \frac{1}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f_4 & : \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 & (|x| \leq 1) \\ -x & (|x| > 1) \end{cases} \end{array}$$

	f_1	f_2	f_3	f_4
全射				
単射				

(2) 上の各写像のうち全単射となるものに関しては, その逆写像を定義域と終域が分かる形で決定せよ.

$$\boxed{3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

写像 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して, $\{\boldsymbol{0}\}$ の逆像 $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ を求めよ.

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{array}$$

4 整数全体 $\mathbb{Z}$ に

$$xRy : \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})[x - y = 7k] \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

で関係 R を定める.

- (1) R が $\mathbb{Z}$ の同値関係であることを示せ.
- (2) 2004 年元旦は何曜日か.

幾何一演習前期試験 2003 年 7 月 16 日実施	学籍番号	氏 名

- 1 (1) P, Q, R を文とするととき,

$$(P \Rightarrow (Q \text{ or } R)) \iff ((P \& (\text{not} Q)) \Rightarrow R)$$

が恒真文であることを, 下の真理表を完成させることにより示せ.

P	Q	R	$(P \Rightarrow (Q \text{ or } R)) \iff ((P \& (\text{not} Q)) \Rightarrow R)$				
T	T	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	F	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	T	T	T	T	F	T
F	F	F	T	F	T	F	T

- (2) 集合 A, B, C に対して

$$A \subset B \cup C \iff A \setminus B \subset C$$

が成り立つことを, (1) で示した恒真文を用いて示せ.

$$\begin{aligned}
A \subset B \cup C &\iff \forall x[(x \in A) \Rightarrow (x \in B \cup C)] \\
&\iff \forall x[(x \in A) \Rightarrow ((x \in B) \text{ or } (x \in C))] \\
&\stackrel{(1)}{\iff} \forall x[((x \in A) \& (x \notin B)) \Rightarrow (x \in C)] \\
&\iff \forall x[(x \in A \setminus B) \Rightarrow (x \in C)] \\
&\iff A \setminus B \subset C
\end{aligned}$$

2 (1) 次の各写像に対して, 下の表を完成させよ.

$$\begin{array}{ccc} f_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$\infty \searrow$	0	$\nearrow \infty$

より, 全射でなく単射でない.

$$\begin{array}{ccc} f_3 : (0, \infty) & \longrightarrow & (0, \frac{\pi}{2}) \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \arctan \frac{1}{x} \end{array}$$

x	0	$\cdots$
$f_3'(x)$	$\times$	$-$
$f_3(x)$	$\times$	$\frac{\pi}{2} \searrow 0$

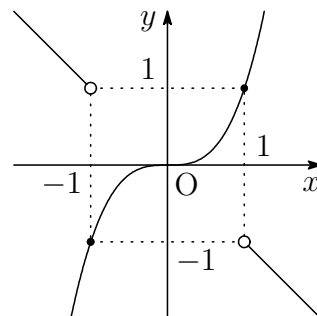
より, 全射であり単射である.

$$\begin{array}{ccc} f_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & e^{-x} \end{array}$$

x	$\cdots$
$f_2'(x)$	$-$
$f_2(x)$	$\infty \searrow 0$

より, 全射でなく単射である.

$$\begin{array}{ccc} f_4 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 & (|x| \leq 1) \\ -x & (|x| > 1) \end{cases} \end{array}$$



より, 全射であり単射である.

	f_1	f_2	f_3	f_4
全射	$\times$	$\times$	$\bigcirc$	$\bigcirc$
単射	$\times$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigcirc$

(2) 上の各写像のうち全単射となるものに関しては, その逆写像を定義域と終域が分かる形で決定せよ.

$$\begin{array}{ccc} f_3^{-1} : (0, \frac{\pi}{2}) & \longrightarrow & (0, \infty) \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\tan x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} f_4^{-1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \sqrt[3]{x} & (|x| \leq 1) \\ -x & (|x| > 1) \end{cases} \end{array}$$

$$\boxed{3} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 10 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ とする.}$$

写像 $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ に対して, $\{\mathbf{0}\}$ の逆像 $\{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ を求めよ.

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} & \longmapsto & A\mathbf{x} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & 2 & | & 0 \\ 4 & -7 & 10 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_1+R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & | & 0 \\ 0 & 3 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{cases} x_1 = -4t \\ x_2 = 2t \\ x_3 = 3t \end{cases} \quad (t \text{ は任意定数})$$

$$\therefore \{\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

※直接, 連立方程式
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 0 \end{cases} \quad \cdots (*) \text{ を解いてもよい.}$$

第 1 式と第 2 式, 第 1 式と第 3 式それぞれより x_3 を消去すると, 同じ $x_1 + 2x_2 = 0$ となる. よって

$$(*) \iff (x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \ \& \ x_1 + 2x_2 = 0)$$

$x_1 + 2x_2 = 0$ より $x_1 = -2x_2$ で, これを $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ に代入すれば $x_3 = \frac{3}{2}x_2$
(分数はなるべく使いたくないので) $x_2 = 2t$ (t は任意定数) とおけば, $x_1 = -4t$, $x_3 = 3t$ を得る.

4 整数全体 $\mathbb{Z}$ に

$$xRy : \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})[x - y = 7k] \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

で関係 R を定める.

(1) R が $\mathbb{Z}$ の同値関係であることを示せ.

(2) 2004 年元旦は何曜日か.

(1) $x, y, z \in \mathbb{Z}$ とする.

反射律: $x - x = 0 = 7 \cdot 0$ で $0 \in \mathbb{Z}$ $\therefore xRx$

対称律: xRy とすると $(\exists k \in \mathbb{Z})[x - y = 7k]$

このとき $y - x = -(x - y) = -7k = 7 \cdot (-k)$ で $-k \in \mathbb{Z}$ $\therefore yRx$

推移律: xRy & yRz とすると $(\exists k_1 \in \mathbb{Z})[x - y = 7k_1]$ & $(\exists k_2 \in \mathbb{Z})[y - z = 7k_2]$

このとき $x - z = (x - y) + (y - z) = 7k_1 + 7k_2 = 7(k_1 + k_2)$ で $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ $\therefore xRz$

(2) 2004 年元旦 (1 月 1 日) は, 今日 (2003 年 7 月 16 日) から

$$(31 - 16) + 31 + 30 + 31 + 30 + 31 + 1 = 169 \text{ 日後}$$

$169 = 7 \times 24 + 1$ より, 2004 年元旦は今日 (水) の 1 日後の曜日と同じ. よって, 木曜日.