

幾何一演習後期試験 2003 年 1 月 8 日実施	学籍番号	氏 名

1 集合 X_1, X_2, Y_1, Y_2 に対して

$$(\#X_1 = \#X_2 \ \& \ \#Y_1 = \#Y_2) \implies \#(X_1 \times Y_1) = \#(X_2 \times Y_2)$$

が成り立つことを, 次の順で示せ.

(1) $\#X_1 = \#X_2 \ \& \ \#Y_1 = \#Y_2$ より, 全単射 $f: X_1 \longrightarrow X_2, g: Y_1 \longrightarrow Y_2$ が存在する.

$$\text{全単射 } h: X_1 \times Y_1 \longrightarrow X_2 \times Y_2$$

を f と g を用いて具体的に定めよ.

(2) 上で定めた h が全単射であることを確認せよ.

2 次の集合の濃度を答えよ. 答のみでよいが, 証明があれば加点する.

(1) $\#\{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\} =$ _____ (2) $\#C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) =$ _____

(3) $\#\{X \rightarrow Y \text{ は全射}\} =$ _____ (4) $\#\{X \rightarrow Y \text{ は単射}\} =$ _____
ただし $X = \{1, 3, 5\}, Y = \{2, 4\}$ とする. ただし $X = \{1, 3, 5\}, Y = \{2, 4\}$ とする.

3 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d(x, y) = 2|x_1 - y_1| + 3|x_2 - y_2|$$

とおくと, $(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間となる.

(1) 距離の公理のうち, 三角不等式

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}^2)$$

を示せ.

(2) この距離 d に対して, $(0, 0)$ 中心の単位円を図示せよ.

4 $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間とし, Y を X の空でない部分集合とする. また, Y から X への包含写像を f とする.

(1) $\mathcal{O}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{O}_X\}$ とおく. $(Y, \mathcal{O}_Y)$ が位相空間となることを示せ.

(2) $f: (Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ が連続であることを示せ.

(3) $\mathcal{O}$ を Y の任意の開集合系とすると, 次を示せ.

$$f: (Y, \mathcal{O}) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X) \text{ が連続} \implies \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}$$

(4) $A \subset Y$ の $(Y, \mathcal{O}_Y)$, $(X, \mathcal{O}_X)$ における閉包をそれぞれ $\overline{A}^Y$, $\overline{A}^X$ とするとき, 次を示せ.

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$$

幾何一演習後期試験 2003 年 1 月 8 日実施	学籍番号	氏 名

1 集合 X_1, X_2, Y_1, Y_2 に対して

$$(\#X_1 = \#X_2 \ \& \ \#Y_1 = \#Y_2) \implies \#(X_1 \times Y_1) = \#(X_2 \times Y_2)$$

が成り立つことを, 次の順で示せ.

(1) $\#X_1 = \#X_2 \ \& \ \#Y_1 = \#Y_2$ より, 全単射 $f: X_1 \longrightarrow X_2, g: Y_1 \longrightarrow Y_2$ が存在する.

$$\text{全単射 } h: X_1 \times Y_1 \longrightarrow X_2 \times Y_2$$

を f と g を用いて具体的に定めよ.

(2) 上で定めた h が全単射であることを確認せよ.

$$\begin{array}{ccc} (1) \ h : X_1 \times Y_1 & \longrightarrow & X_2 \times Y_2 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (x_1, y_1) & \longmapsto & (f(x_1), g(y_1)) \end{array}$$

(2) いろいろな証明方法があるが, ここでは直接証明を述べる.

全射性

$(x_2, y_2) \in X_2 \times Y_2$ とすると $x_2 \in X_2 \ \& \ y_2 \in Y_2$

$x_2 \in X_2$ で $f: X_1 \longrightarrow X_2$ が全射より $(\exists x_1 \in X_1)[x_2 = f(x_1)]$

$y_2 \in Y_2$ で $g: Y_1 \longrightarrow Y_2$ が全射より $(\exists y_1 \in Y_1)[y_2 = g(y_1)]$

$$\therefore (x_1, y_1) \in X_1 \times Y_1 \ \& \ (x_2, y_2) = (f(x_1), g(y_1)) = h(x_1, y_1)$$

単射性

$(x_1, y_1), (x'_1, y'_1) \in X_1 \times Y_1 \ \& \ h(x_1, y_1) = h(x'_1, y'_1)$ とすると, $(f(x_1), g(y_1)) = (f(x'_1), g(y'_1))$ より

$$f(x_1) = f(x'_1) \ \& \ g(y_1) = g(y'_1)$$

f, g 単射より $x_1 = x'_1 \ \& \ y_1 = y'_1$

$$\therefore (x_1, y_1) = (x'_1, y'_1)$$

2 次の集合の濃度を答えよ. 答のみでよいが, 証明があれば加点する.

(1) $\#\{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \underline{\aleph_0}$

(2) $\#C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \underline{\aleph}$

$O := \{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおくと

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & O \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ n & \longmapsto & 2n-1 \end{array}$$

は全単射.

$$\therefore \#\{2n-1 \mid n \in \mathbb{N}\} = \#\mathbb{N} = \aleph_0$$

$$\begin{array}{ccc} C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & F(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ f & \longmapsto & f|_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

は単射より

$$\#C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \#F(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$$

一方, $a \in \mathbb{R}$ に対して $f_a(x) := a$ とおけば

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a & \longmapsto & f_a \end{array}$$

は単射より

$$\aleph = \#\mathbb{R} \leq \#C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

よって, Bernstein の定理より

$$\#C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \aleph$$

(3) $\#\{X \rightarrow Y \text{ は全射}\} = \underline{6}$

(4) $\#\{X \rightarrow Y \text{ は単射}\} = \underline{0}$

ただし $X = \{1, 3, 5\}, Y = \{2, 4\}$ とする.

ただし $X = \{1, 3, 5\}, Y = \{2, 4\}$ とする.

X から Y への全射の総数は, 異なる 3 つの玉を異なる 2 つの箱に入れる場合の数に等しい. ただし, 空箱になる場合は除く.

$\#X = 3 > 2 = \#Y$ より, X から Y への単射は存在しない.

$$\therefore 2^3 - 2 = 6$$

※ X から Y への写像は

	1	3	5
f_1	2	2	2
f_2	2	2	4
f_3	2	4	2
f_4	2	4	4
f_5	4	2	2
f_6	4	2	4
f_7	4	4	2
f_8	4	4	4

の 8 個あるが, f_1 と f_8 は全射でない.

3 $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$d(x, y) = 2|x_1 - y_1| + 3|x_2 - y_2|$$

とおくと, $(\mathbb{R}^2, d)$ は距離空間となる.

(1) 距離の公理のうち, 三角不等式

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (x, y, z \in \mathbb{R}^2)$$

を示せ.

(2) この距離 d に対して, $(0, 0)$ 中心の単位円を図示せよ.

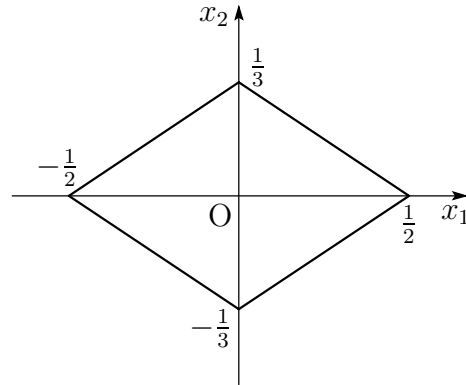
(1) $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2)$ とする.

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 2|x_1 - y_1| + 3|x_2 - y_2| \\ &= 2|(x_1 - z_1) + (z_1 - y_1)| + 3|(x_2 - z_2) + (z_2 - y_2)| \\ &\leq 2(|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|) + 3(|x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|) \\ &= (2|x_1 - z_1| + 3|x_2 - z_2|) + (2|z_1 - y_1| + 3|z_2 - y_2|) \\ &= d(x, z) + d(z, y) \end{aligned}$$

(2) $x = (x_1, x_2), y = (0, 0)$ とすれば

$$d(x, y) = 1 \iff 2|x_1| + 3|x_2| = 1$$

より, 求める単位円は右図.



4 (X, $\mathcal{O}_X$) を位相空間とし, Y を X の空でない部分集合とする. また, Y から X への包含写像を f とする.

(1) $\mathcal{O}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{O}_X\}$ とおく. (Y, $\mathcal{O}_Y$) が位相空間となることを示せ.

(2) $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ が連続であることを示せ.

(3) $\mathcal{O}$ を Y の任意の開集合系とすると, 次を示せ.

$$f : (Y, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X) \text{ が連続} \implies \mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}$$

(4) $A \subset Y$ の (Y, $\mathcal{O}_Y$), (X, $\mathcal{O}_X$) における閉包をそれぞれ $\overline{A}^Y, \overline{A}^X$ とするとき, 次を示せ.

$$\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$$

(1) (O1) $\emptyset \in \mathcal{O}_X$ より $\emptyset = \emptyset \cap Y \in \mathcal{O}_Y$, $X \in \mathcal{O}_X$ より $Y = X \cap Y \in \mathcal{O}_Y$

(O2) $U_1, U_2 \in \mathcal{O}_Y$ とすると

$$(\exists O_1 \in \mathcal{O}_X)[U_1 = O_1 \cap Y] \ \& \ (\exists O_2 \in \mathcal{O}_X)[U_2 = O_2 \cap Y]$$

$O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}_X$ より

$$U_1 \cap U_2 = (O_1 \cap Y) \cap (O_2 \cap Y) = (O_1 \cap O_2) \cap Y \in \mathcal{O}_Y$$

(O3) $(\forall \lambda \in \Lambda)[U_\lambda \in \mathcal{O}_Y]$ とすると

$$(\forall \lambda \in \Lambda)(\exists O_\lambda \in \mathcal{O}_X)[U_\lambda = O_\lambda \cap Y]$$

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}_X$ より

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (O_\lambda \cap Y) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) \cap Y \in \mathcal{O}_Y$$

※包含写像 f に対して $(\forall A \subset X)[f^{-1}(A) = A \cap Y]$ であることに注意.

(2) $O \in \mathcal{O}_X$ とすると $f^{-1}(O) = O \cap Y \in \mathcal{O}_Y$ となるので, $f : (Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ は連続.

(3) $U \in \mathcal{O}_Y$ とすると $(\exists O \in \mathcal{O}_X)[U = O \cap Y]$

$f : (Y, \mathcal{O}) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ は連続より $f^{-1}(O) \in \mathcal{O} \quad \therefore \quad U = O \cap Y = f^{-1}(O) \in \mathcal{O}$

よって $\mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}$

(4) $x \in Y$ に対して

$$(\mathcal{O}_Y)_x := \{U \in \mathcal{O}_Y \mid x \in U\}, \quad (\mathcal{O}_X)_x := \{O \in \mathcal{O}_X \mid x \in O\}$$

とおく.

$$\begin{cases} x \in \overline{A}^Y & \iff (\forall U \in (\mathcal{O}_Y)_x)[U \cap A \neq \emptyset] \\ x \in \overline{A}^X & \iff (\forall O \in (\mathcal{O}_X)_x)[O \cap A \neq \emptyset] \end{cases}$$

であることに注意.

$x \in \overline{A}^Y$ とし, $O \in (\mathcal{O}_X)_x$ を任意にとる. $U := O \cap Y$ とおくと, $U \in (\mathcal{O}_Y)_x$ であることは容易に分かる. よって

$$O \cap A = O \cap (A \cap Y) = (O \cap Y) \cap A = U \cap A \neq \emptyset$$

より $x \in \overline{A}^X$ が分かる. $x \in Y$ は明らかなので $x \in \overline{A}^X \cap Y \quad \therefore \quad \overline{A}^Y \subset \overline{A}^X \cap Y$

逆に $x \in \overline{A}^X \cap Y$ とし, $U \in (\mathcal{O}_Y)_x$ を任意にとる. $(\exists O \in \mathcal{O}_X)[U = O \cap Y]$ かつ $x \in O$ より $O \in (\mathcal{O}_X)_x$ が分かる. よって

$$U \cap A = (O \cap Y) \cap A = O \cap (A \cap Y) = O \cap A \neq \emptyset$$

より $x \in \overline{A}^Y \quad \therefore \quad \overline{A}^X \cap Y \subset \overline{A}^Y$

以上により $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$