幾何一演習前期試験 2002 年 7 月 10 日実施	学籍番号	氏　　名

$\boxed{1}$ (1) P, Q, R を文とするとき,

$$((P \ \&\ (\mathrm{not} Q)) \Rightarrow R) \quad \Longleftrightarrow \quad ((P \ \&\ (\mathrm{not} R)) \Rightarrow Q)$$

が恒真文であることを, 下の真理表を完成させることにより示せ.

P	Q	R	$((P\ \&\ (\mathrm{not}Q))$	$\Rightarrow$	$R)$	$\Longleftrightarrow$	$((P\ \&\ (\mathrm{not}R))$	$\Rightarrow$	$Q)$
T	T	T	$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	$\square$	
T	T	F	$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	$\square$	
T	F	T	$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	$\square$	
T	F	F	$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	$\square$	
F	T	T	$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	$\square$	
F	T	F	$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	$\square$	
F	F	T	$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	$\square$	
F	F	F	$\square$	$\square$		$\square$	$\square$	$\square$	
			①	②		⑤	③	④	

(2) 集合 A, B, C に対して

$$(A \setminus B \subset C) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \setminus C \subset B)$$

が成り立つことを, (1) で示した恒真文を用いて示せ.

$\boxed{2}$ (1) 次の各写像に対して, 下の表を完成させよ.

$$\begin{array}{cccccc} f_1 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} f_2 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & x & \longmapsto & x(x-1)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} f_3 & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{e^x-1}{e^x+1} \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} f_4 & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & x & \longmapsto & \log(x^2+1) \end{array}$$

	f_1	f_2	f_3	f_4
全射				
単射				

(2) 上の各写像のうち全単射となるものに関しては, その逆写像を定義域と終域が分かる形で決定せよ.

$\boxed{3}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, $h : Z \longrightarrow X$ に対して, $h \circ g \circ f$ と $f \circ h \circ g$ が全射, $g \circ f \circ h$ が単射であるとき, 3 つの写像 f, g, h は全て全単射であることを示せ.

$\boxed{4}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ と集合 $A(\subset X)$, $C(\subset Y)$ に対して,

$$f(f^{-1}(C) \cap A) = C \cap f(A)$$

が成り立つことを示せ.

幾何一演習前期試験 2002 年 7 月 10 日実施	学籍番号	氏　　名

$\boxed{1}$ (1) P, Q, R を文とするとき,

$$((P \ \& \ (\mathrm{not} Q)) \Rightarrow R) \quad \Longleftrightarrow \quad ((P \ \& \ (\mathrm{not} R)) \Rightarrow Q)$$

が恒真文であることを, 下の真理表を完成させせることにより示せ.

P	Q	R	$((P \ \& \ (\mathrm{not} Q))$	$\Rightarrow$	$R)$	$\Longleftrightarrow$	$((P \ \& \ (\mathrm{not} R))$	$\Rightarrow$	$Q)$
T	T	T	F	T		T	F	T	
T	T	F	F	T		T	T	T	
T	F	T	T	T		T	F	T	
T	F	F	T	F		T	T	F	
F	T	T	F	T		T	F	T	
F	T	F	F	T		T	F	T	
F	F	T	F	T		T	F	T	
F	F	F	F	T		T	F	T	

(2) 集合 A, B, C に対して

$$(A \setminus B \subset C) \quad \Longleftrightarrow \quad (A \setminus C \subset B)$$

が成り立つことを, (1) で示した恒真文を用いて示せ.

$$\begin{aligned}
A \setminus B \subset C \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall x[(x \in A \setminus B) \Rightarrow (x \in C)] \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x[((x \in A) \ \& \ (x \notin B)) \Rightarrow (x \in C)] \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x[((x \in A) \ \& \ (\mathrm{not}(x \in B))) \Rightarrow (x \in C)] \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x[((x \in A) \ \& \ (\mathrm{not}(x \in C))) \Rightarrow (x \in B)] \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x[((x \in A) \ \& \ (x \notin C)) \Rightarrow (x \in B)] \\
&\Longleftrightarrow \quad \forall x[(x \in A \setminus C) \Rightarrow (x \in B)] \\
&\Longleftrightarrow \quad A \setminus C \subset B
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ (1) 次の各写像に対して, 下の表を完成させよ.

$$\begin{array}{rcccc} f_1 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \cup\!\!\!\!\!\!\;\;\Psi & & \Psi \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

増減表

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$\infty \searrow$	0	$\nearrow \infty$

より, 全射でなく単射でない.

$$\begin{array}{rcccc} f_2 & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & x & \longmapsto & x(x-1)^2 \end{array}$$

増減表

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_2'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_2(x)$	$-\infty \nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow \infty$

より, 全射であり単射でない.

$$\begin{array}{rcccc} f_3 & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{e^x-1}{e^x+1} \end{array}$$

増減表

x	0	$\cdots$
$f_3'(x)$		$+$
$f_3(x)$	0	$\nearrow 1$

より, 全射でなく単射である.

$$\begin{array}{rcccc} f_4 & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & x & \longmapsto & \log(x^2+1) \end{array}$$

増減表

x	0	$\cdots$
$f_4'(x)$		$+$
$f_4(x)$	0	$\nearrow \infty$

より, 全射であり単射である.

	f_1	f_2	f_3	f_4
全射	×	○	×	○
単射	×	×	○	○

(2) 上の各写像のうち全単射となるものに関しては, その逆写像を定義域と終域が分かる形で決定せよ.

(1) より f_4 が全単射なので, 逆写像をもつ. 逆写像の対応は, $x, y \geq 0$ のとき $x = \log(y^2+1)$ を y について解いて

$$\begin{array}{rcccc} f_4^{-1} & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & x & \longmapsto & \sqrt{e^x-1} \end{array}$$

$\boxed{3}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$, $h : Z \longrightarrow X$ に対して, $h \circ g \circ f$ と $f \circ h \circ g$ が全射, $g \circ f \circ h$ が単射であるとき, 3 つの写像 f, g, h は全て全単射であることを示せ.

(1) h について
$h \circ g \circ f$ が全射より, h は全射.
$g \circ f \circ h$ が単射より, h は単射.
よって, h は全単射.
(2) f について
$f \circ h \circ g$ が全射より, f は全射.
h が全単射で $g \circ f \circ h$ が単射より, $g \circ f$ は単射で f も単射.
よって, f は全単射.
(3) g について
f, h が全単射で $f \circ h \circ g$ が全射より, g は全射.
f, h が全単射で $g \circ f \circ h$ が単射より, g は単射.
よって, g は全単射.

※解答は, これ以外にもいろいろある.

$\boxed{4}$ 写像 $f : X \longrightarrow Y$ と集合 $A(\subset X)$, $C(\subset Y)$ に対して,

$$f(f^{-1}(C) \cap A) = C \cap f(A)$$

が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}
y \in f(f^{-1}(C) \cap A) &\iff (\exists x \in f^{-1}(C) \cap A)[y = f(x)] \\
&\iff \exists x[(x \in f^{-1}(C) \cap A) \ \& \ (y = f(x))] \\
&\iff \exists x[((x \in f^{-1}(C)) \ \& \ (x \in A)) \ \& \ (y = f(x))] \\
&\iff \exists x[(f(x) \in C) \ \& \ (x \in A) \ \& \ (y = f(x))] \\
&\iff \exists x[(y \in C) \ \& \ (x \in A) \ \& \ (y = f(x))] \\
&\iff (y \in C) \ \& \ (\exists x[(x \in A) \ \& \ (y = f(x))]) \\
&\iff (y \in C) \ \& \ ((\exists x \in A)[y = f(x)]) \\
&\iff (y \in C) \ \& \ (y \in f(A)) \\
&\iff y \in C \cap f(A)
\end{aligned}$$