直接法, 対偶法, 背理法

> 次を直接法, 対偶法, 背理法等で示せ.
> (1) $0 < a < 1$ & $0 < b < 1 \quad \Longrightarrow \quad ab \leq \frac{1}{4}$ or $(1-a)(1-b) \leq \frac{1}{4}$
> (2) $a, b, c, d > 0$ とする.
> $\mathrm{not}(a = b = c = d) \quad \Longrightarrow \quad a(1-b) < \frac{1}{4}$ or $b(1-c) < \frac{1}{4}$ or $c(1-d) < \frac{1}{4}$ or $d(1-a) < \frac{1}{4}$

※直接法：恒真文

$$(P \ \Rightarrow \ (Q \text{ or } R)) \quad \Longleftrightarrow \quad ((P \ \& \ (\mathrm{not}Q)) \ \Rightarrow \ R)$$

(資料 01 参照) の利用.
※対偶法：恒真文

$$(P \ \Rightarrow \ Q) \quad \Longleftrightarrow \quad ((\mathrm{not}Q) \ \Rightarrow \ (\mathrm{not}P))$$

(対偶, 資料 01 参照) の利用.
※背理法：恒真文

$$(\mathrm{not}P \ \Rightarrow \ (Q \ \& \ (\mathrm{not}Q))) \quad \Longrightarrow \quad P$$

(背理法 ①, 資料 01 参照) において, P, Q をそれぞれ $P \ \Rightarrow \ Q$, R に変え,

$$\mathrm{not}(P \ \Rightarrow \ Q) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{not}((\mathrm{not}P) \text{ or } Q) \quad \Longleftrightarrow \quad (P \ \& \ (\mathrm{not}Q))$$

に注意すると, 恒真文

$$((P \ \& \ (\mathrm{not}Q)) \ \Rightarrow \ (R \ \& \ (\mathrm{not}R))) \quad \Longrightarrow \quad (P \ \Rightarrow \ Q)$$

(背理法 ②) が得られる．これの利用.
※ $0 < x < 1$ に対して, $0 < x(1-x) \leq \frac{1}{4}$ (等号成立は $x = \frac{1}{2}$) が成り立つ.

(1) <u>直接法</u>
$0 < a < 1$ & $0 < b < 1$ & $ab > \frac{1}{4}$ とする．このとき

$$(1-a)(1-b) < (1-a)\left(1 - \frac{1}{4a}\right) = \frac{5}{4} - \left(a + \frac{1}{4a}\right) \leq \frac{5}{4} - 2\sqrt{a \times \frac{1}{4a}} = \frac{1}{4}$$

<u>背理法</u>
$(0 < a < 1$ & $0 < b < 1)$ & $(ab > \frac{1}{4}$ & $(1-a)(1-b) > \frac{1}{4})$ とする．このとき

$$A := ab \cdot (1-a)(1-b) > \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

一方

$$A = a(1-a) \cdot b(1-b) \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

これは矛盾.

(2) <u>対偶法</u>
$a(1-b) \geq \frac{1}{4}$ & $b(1-c) \geq \frac{1}{4}$ & $c(1-d) \geq \frac{1}{4}$ & $d(1-a) \geq \frac{1}{4}$ とする．このとき

$$A := a(1-b) \cdot b(1-c) \cdot c(1-d) \cdot d(1-a) \geq \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}$$

一方, $a, b, c, d > 0$ と仮定より $0 < a, b, c, d < 1$ なので

$$A = a(1-a) \cdot b(1-b) \cdot c(1-c) \cdot d(1-d) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256} \quad \cdots (*)$$

よって $(*)$ は等号成立し, 等号成立条件より $a = b = c = d$ $(= \frac{1}{2})$ が成り立つ.