資料 02 の補足

資料 02 で

$$0 < a < 1 \ \& \ 0 < b < 1 \quad \Longrightarrow \quad ab \leq \tfrac{1}{4} \text{ or } (1-a)(1-b) \leq \tfrac{1}{4} \quad \cdots (*)$$

が「真」であることを, 直接法と背理法により示した. ここでは, 対偶法を試みる.
$(*)$ の対偶は

$$ab > \tfrac{1}{4} \ \& \ (1-a)(1-b) > \tfrac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad \text{not}(0 < a < 1) \text{ or } \text{not}(0 < b < 1)$$

で, これは

$$ab > \tfrac{1}{4} \ \& \ (1-a)(1-b) > \tfrac{1}{4} \ \& \ 0 < a < 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{not}(0 < b < 1) \quad \cdots (**)$$

と同値である (各自確認せよ). よって, $(*)$ が「真」であることを対偶法で示すには $(**)$ が「真」であることを示せばよい.

解
$ab > \dfrac{1}{4}$ & $0 < a$ より, $b > \dfrac{1}{4a} > 0 \qquad \therefore \quad 0 < b \quad \cdots$①
$(1-a)(1-b) > \dfrac{1}{4}$ & $a < 1$ より, $1 - b > \dfrac{1}{4(1-a)} > 0 \qquad \therefore \quad b < 1 \quad \cdots$②
よって, ①, ② より $0 < b < 1$ 　　　あれ?

疑問　$\text{not}(0 < b < 1)$ が出るはずなのに $0 < b < 1$ が出てしまった. なぜだろう?

(1) 上の**疑問**に答えよ.
(2) 次の命題を「真」とするような実数の組 (a, b) を ab 平面に図示せよ.

$$(\forall x \in \mathbb{R})[a \leq x \leq b \implies b^2 \leq x \leq a + 1]$$

※解答はしばらくおあずけ.