$(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p) \quad (1 \le p \le \infty)$

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\|\boldsymbol{x}\|_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^N |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \le p < \infty) \\ \displaystyle\max_{1 \le k \le N} |x_k| & (p = \infty) \end{cases}$$

とおくと, $\|\cdot\|_p$ はノルムの公理

(N1) $\|\boldsymbol{x}\|_p \ge 0, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_p = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

(N2) $\|\alpha\boldsymbol{x}\|_p = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|_p \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

(N3) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_p + \|\boldsymbol{y}\|_p$

を満たす. (N1), (N2) は容易だが, (N3) を示すには次の定理が必要.

定理

$1 < p < \infty$ に対して, $1 < q < \infty$ を $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ となるようにとる (この q を p の**共役指数**という).

(1) Young（ヤング）の不等式

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad (a, b > 0)$$

(2) Hölder（ヘルダー）の不等式

$$\sum_{k=1}^N |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

(3) Minkowski（ミンコフスキー）の不等式

$$\left(\sum_{k=1}^N |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(N3) の証明

(1) $p = 1$ のとき

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_1 = \sum_{k=1}^N |x_k + y_k| \le \sum_{k=1}^N (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^N |x_k| + \sum_{k=1}^N |y_k| = \|\boldsymbol{x}\|_1 + \|\boldsymbol{y}\|_1$$

(2) $1 < p < \infty$ のとき, Minkowski の不等式そのもの.

(3) $p = \infty$ のとき, 任意の $k = 1, \dots, N$ に対して

$$|x_k + y_k| \le |x_k| + |y_k| \le \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

となるので

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty = \max_{1\le k\le N}|x_k+y_k| \le \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty \qquad \blacksquare$$

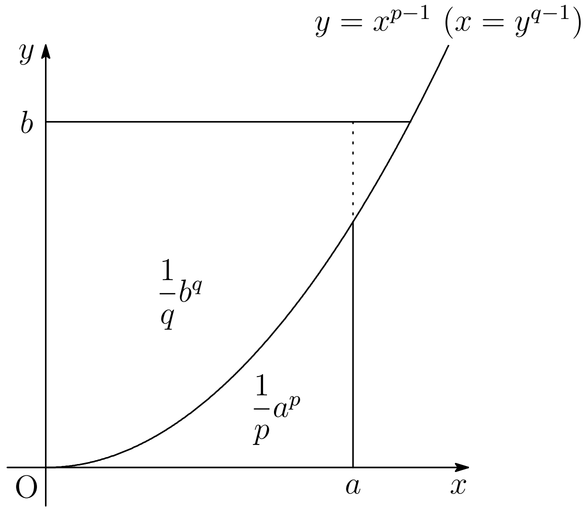
定理の証明

(1) 右図より

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \quad (a, b > 0)$$

が成り立つ.

※等号は $b = a^{p-1}$ を変形した $a^p = b^q$ のときに成立.



(2) $a := \dfrac{|x_k|}{\|\boldsymbol{x}\|_p},\ b := \dfrac{|y_k|}{\|\boldsymbol{y}\|_q}$ として Young の不等式を使うと

$$\frac{|x_k y_k|}{\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q} \le \frac{1}{p}\cdot\frac{|x_k|^p}{\|\boldsymbol{x}\|_p^p} + \frac{1}{q}\cdot\frac{|y_k|^q}{\|\boldsymbol{y}\|_q^q} = \frac{1}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p}|x_k|^p + \frac{1}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q}|y_k|^q$$

$k = 1, \ldots, N$ の和をとれば

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q}\sum_{k=1}^N |x_k y_k| \le \frac{1}{p\|\boldsymbol{x}\|_p^p}\sum_{k=1}^N |x_k|^p + \frac{1}{q\|\boldsymbol{y}\|_q^q}\sum_{k=1}^N |y_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^N |x_k y_k| \le \|\boldsymbol{x}\|_p\|\boldsymbol{y}\|_q = \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(3) $(*)$ に Hölder の不等式を使い, $(p-1)q = p$ に注意すれば

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N |x_k+y_k|^p &= \sum_{k=1}^N |x_k+y_k||x_k+y_k|^{p-1} \\
&\le \sum_{k=1}^N |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^N |y_k||x_k+y_k|^{p-1} \quad \cdots (*) \\
&\le \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^N |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^N |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left\{\left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \left(\sum_{k=1}^N |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(\sum_{k=1}^N |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^N |x_k+y_k|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \le \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^N |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \blacksquare$$

例

$B_p := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid \|\boldsymbol{x}\|_p = 1\}$ を $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ における**単位球** (**面**) という.

$N = 2$ のときは

$$\begin{cases} B_1 & : \quad |x_1| + |x_2| = 1 \\ B_2 & : \quad x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ B_\infty & : \quad \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1 \end{cases}$$

より, 右図のようになる.