濃度の演算

定義（濃度の演算）
$\#X = \alpha,\ \#Y = \beta$ とする.
(1) $\alpha \cdot \beta := \#(X \times Y)$ (α と β の積)
(2) $\beta^{\alpha} := \#\mathcal{F}(X, Y)$ (β の α 乗)
(3) $X \cap Y = \emptyset$ のとき, $\alpha + \beta := \#(X \cup Y)$ (α と β の和)

濃度の演算が well-defined なこと
$\#X_1 = \#X_2,\ \#Y_1 = \#Y_2$ とすると

$$f : X_1 \longrightarrow X_2, \quad g : Y_1 \longrightarrow Y_2 \qquad \text{(共に全単射)}$$

が存在する. このとき

(1) $$\begin{array}{ccccc} F & : & X_1 \times Y_1 & \longrightarrow & X_2 \times Y_2 \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & (x_1, y_1) & \longmapsto & (f(x_1), g(y_1)) \end{array}$$ は全単射. $\therefore\ \#(X_1 \times Y_1) = \#(X_2 \times Y_2)$

(2) $$\begin{array}{ccccc} F & : & \mathcal{F}(X_1, Y_1) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X_2, Y_2) \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & \varphi & \longmapsto & g \circ \varphi \circ f^{-1} \end{array}$$ は全単射. $\therefore\ \#\mathcal{F}(X_1, Y_1) = \#\mathcal{F}(X_2, Y_2)$

(3) $X_1 \cap Y_1 = \emptyset,\ X_2 \cap Y_2 = \emptyset$ のとき,
$$\begin{array}{ccccc} F & : & X_1 \cup Y_1 & \longrightarrow & X_2 \cup Y_2 \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & z & \longmapsto & \begin{cases} f(z) & (z \in X_1) \\ g(z) & (z \in Y_1) \end{cases} \end{array}$$ は全単射. $\therefore\ \#(X_1 \cup Y_1) = \#(X_2 \cup Y_2)$

証明

(1) $$\begin{array}{ccccc} G & : & X_2 \times Y_2 & \longrightarrow & X_1 \times Y_1 \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & (x_2, y_2) & \longmapsto & (f^{-1}(x_2), g^{-1}(y_2)) \end{array}$$ とおくと

$(G \circ F)(x_1, y_1) = G(F(x_1, y_1)) = G(f(x_1), g(y_1)) = (f^{-1}(f(x_1)), g^{-1}(g(y_1))) = (x_1, y_1)$
$(F \circ G)(x_2, y_2) = F(G(x_2, y_2)) = F(f^{-1}(x_2), g^{-1}(y_2)) = (f(f^{-1}(x_2)), g(g^{-1}(y_2))) = (x_2, y_2)$
よって, F は全単射で $G = F^{-1}$ が分かる.

(2) $$\begin{array}{ccccc} G & : & \mathcal{F}(X_2, Y_2) & \longrightarrow & \mathcal{F}(X_1, Y_1) \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & \psi & \longmapsto & g^{-1} \circ \psi \circ f \end{array}$$ とおくと

$(G \circ F)(\varphi) = G(F(\varphi)) = G(g \circ \varphi \circ f^{-1}) = g^{-1} \circ (g \circ \varphi \circ f^{-1}) \circ f = \varphi$
$(F \circ G)(\psi) = F(G(\psi)) = F(g^{-1} \circ \psi \circ f) = g \circ (g^{-1} \circ \psi \circ f) \circ f^{-1} = \psi$
よって, F は全単射で $G = F^{-1}$ が分かる.

(3) $$\begin{array}{cccccc} G & : & X_2 \cup Y_2 & \longrightarrow & X_1 \cup Y_1 \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & w & \longmapsto & \begin{cases} f^{-1}(w) & (w \in X_2) \\ g^{-1}(w) & (w \in Y_2) \end{cases} \end{array}$$ とおくと

$$(G \circ F)(z) = G(F(z)) = \begin{cases} G(f(z)) & (z \in X_1) \\ G(g(z)) & (z \in Y_1) \end{cases} = \begin{cases} f^{-1}(f(z)) & (z \in X_1) \\ g^{-1}(g(z)) & (z \in Y_1) \end{cases} = z$$

$$(F \circ G)(w) = F(G(w)) = \begin{cases} F(f^{-1}(w)) & (w \in X_2) \\ F(g^{-1}(w)) & (w \in Y_2) \end{cases} = \begin{cases} f(f^{-1}(w)) & (w \in X_2) \\ g(g^{-1}(w)) & (w \in Y_2) \end{cases} = w$$

よって, F は全単射で $G = F^{-1}$ が分かる. ∎

※上の証明では, 前期でやった次の定理を用いた.

定理

$f : X \longrightarrow Y$ に対して,

$$(\forall x \in X)[(g \circ f)(x) = x] \quad \& \quad (\forall y \in Y)[(f \circ g)(y) = y]$$

を満たす $g : Y \longrightarrow X$ が存在するならば, f は全単射で $g = f^{-1}$ である.