

2 0 0 3 年度基礎数学講義ノート (2 - 1 組)

2 0 0 3 年 4 月 2 6 日 分

1章. 行列とベクトル

1.1 2 次の行列とベクトル

(1) 縦横 2 つずつの数字をならべたものを **2 次正方行列** または **2×2 行列** という. 行列を表す記号として, A, B, C などの大文字をよく使う.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 1 行} \\ \leftarrow \text{第 2 行} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{第} & \text{第} \\ 1 & 2 \\ \text{列} & \text{列} \end{array}$$

a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}
(1, 1) 成分	(1, 2) 成分	(2, 1) 成分	(2, 2) 成分

2 次正方行列のときは, より簡単に $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とかくことがある.

(2) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ において

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \dots\dots \text{列ベクトル}$$

$$\mathbf{b}_1 = (a_{11} \ a_{12}), \mathbf{b}_2 = (a_{21} \ a_{22}) \dots\dots \text{行ベクトル}$$

といい

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2) \quad \text{や} \quad A = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix}$$

と表すこともある.

$$(3) O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots \text{零行列}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \dots\dots \text{単位行列}$$

行列の相等, 和, スカラー倍

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R} \text{ (「} k \text{ は実数」ということ)}$$

(1) 対応する成分が等しい, 即ち

$$a = p, \quad b = q, \quad c = r, \quad d = s$$

が成り立つとき, A と B は **等しい** といい, $A = B$ とかく.

(2) 対応する成分どうしの和で, **和** $A + B$ を定める.

$$A + B = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix}$$

(3) 各成分の k 倍で, **スカラー倍** kA を定める.

$$kA = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

例

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & -3+2 \\ 2+0 & 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(3) 5 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-1) & 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$$

定理 1.12 次正方形行列 A, B, C と $k, l \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

$$(M_1) A + B = B + A$$

$$(M_2) (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(M_3) k(A + B) = kA + kB$$

$$(M_4) (k + l)A = kA + lA$$

$$(M_5) k(lA) = (kl)A$$

$$(M_6) A + O = A$$

$$(M_7) A + (-1)A = O$$

$$(M_8) 1A = A$$

 (M_7) の $(-1)A$ を $-A$ とかき, $A + (-B)$ を $A - B$ とかく.**2 次のベクトル**今後, **ベクトル** といったら, 列ベクトルを意味する.(列) ベクトル $a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して(1) $a = p$, $b = q$ のとき $a = b$ とかく.(2) $a + b = \begin{pmatrix} a + p \\ b + q \end{pmatrix}$ **和**, $ka = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ **スカラー倍**(3) $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **零ベクトル****定理 1.2**2 次のベクトル a, b, c と $k, l \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

$$(V_1) a + b = b + a$$

$$(V_2) (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(V_3) k(a + b) = ka + kb$$

$$(V_4) (k + l)a = ka + la$$

$$(V_5) k(la) = (kl)a$$

$$(V_6) a + 0 = a$$

$$(V_7) a + (-1)a = 0$$

$$(V_8) 1a = a$$

 (V_7) の $(-1)a$ を $-a$ とかき, $a + (-b)$ を $a - b$ とかく.

行列とベクトルの積

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の積 Ax を次で定める.

$$Ax = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$