

2003年度基礎数学講義ノート(3-1組)

2003年5月10日分

関数の最大値・最小値の求め方

- (1) グラフをかく。
- (2) グラフの, 定義域に対応する部分をはっきりさせる。
- (3) はっきりさせたものより, 最大値・最小値をよみとる。さらに, そのときの x の値もできるだけのべる。

グラフを用いなくて, 増減表により求める方法もある。増減表については, § 6 で詳しく説明する。

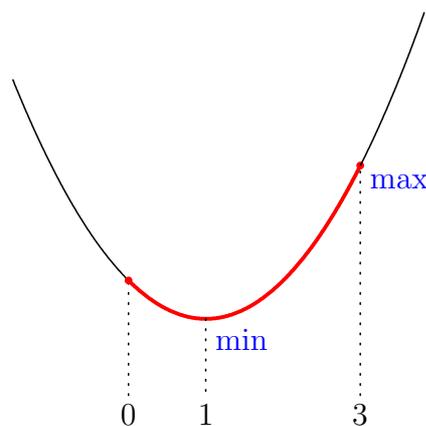
問題 1.5 (1) $y = 2x^2 - 4x$ ($0 \leq x \leq 3$)
 先ず, 平方完成しよう。

$$y = 2x^2 - 4x = 2(x^2 - 2x) = 2(x^2 - 2x + 1 - 1) = 2\{(x-1)^2 - 1\} = 2(x-1)^2 - 2$$

グラフの利用

グラフより

$$\begin{cases} x = 3 \text{ のとき最大値 } 6 \\ x = 1 \text{ のとき最小値 } -2 \end{cases}$$



増減表の利用

増減表より

$$\begin{cases} x = 3 \text{ のとき最大値 } 6 \\ x = 1 \text{ のとき最小値 } -2 \end{cases}$$

x	0	...	1	...	3
y	0		-2		6

どちらか好きな方でやればいいが,

$$\begin{cases} 2 \text{ 次関数のときは, グラフの利用} \\ \text{一般の関数のときは, 増減表の利用} \end{cases}$$

とした方がよい。

2次関数の決定方法

- (1) 異なる3点 $y = ax^2 + bx + c$ (一般形)
 (2) 軸, 頂点, 平行移動 $y = a(x - p)^2 + q$ (基本形)
 (3) x 切片 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ (積の形)

問題1.4

(1) 求める2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおく. グラフが3点 $(-1, 7)$, $(0, -2)$, $(1, -5)$ を通るので代入.

$$(-1, 7) : a - b + c = 7 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(0, -2) : c = -2 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$(1, -5) : a + b + c = -5 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して } a - b = 9 \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{ を } \textcircled{3} \text{ に代入して } a + b = -3 \quad \dots \textcircled{3}'$$

$\textcircled{1}' + \textcircled{3}'$ より

$$\begin{array}{r} a - b = 9 \\ +) a + b = -3 \\ \hline 2a = 6 \end{array} \quad \therefore a = 3$$

$a = 3$ を $\textcircled{1}'$ に代入すれば $b = -6$ なので, 求める2次関数は

$$y = 3x^2 - 6x - 2$$

(3) 「 x 軸に接する \iff 頂点の y 座標 $q = 0$ 」なので, 求める2次関数は $y = a(x - p)^2$ とおける. グラフが2点 $(0, 2)$, $(2, 8)$ を通るので代入.

$$(0, 2) : 2 = a(0 - p)^2 \quad \therefore ap^2 = 2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(2, 8) : 8 = a(2 - p)^2 \quad \therefore a(p - 2)^2 = 8 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ より

$$\frac{a(p - 2)^2}{ap^2} = \frac{8}{2} \quad \therefore \frac{(p - 2)^2}{p^2} = 4 \quad \text{即ち } (p - 2)^2 = 4p^2$$

よって

$$(p - 2)^2 = 4p^2 \iff 3p^2 + 4p - 4 = 0 \iff (p + 2)(3p - 2) = 0 \quad \therefore p = -2, \frac{2}{3}$$

$p = -2$ のとき, $\textcircled{1}$ より $a = \frac{1}{2}$ で, $p = \frac{2}{3}$ のとき, $\textcircled{1}$ より $a = \frac{9}{2}$ なので, 求める2次関数は

$$y = \frac{1}{2}(x + 2)^2, \quad y = \frac{9}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2$$