

2003年度基礎数学講義ノート（2 - 1組）

2003年5月10日分

行列と行列の積

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ の積 AB を次で定める.

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

例

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 5 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

一般には $AB \neq BA$ (p.13 参照). $AB = BA$ が成り立つとき, A と B は可換という.

$b_1 = \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ とおくと $B = (b_1 \ b_2)$ と表せた(前回参照). このとき

$$AB = (Ab_1 \ Ab_2)$$

と表すことができる.

$AA = A^2, AAA = A^3, AAAAA = A^4, \dots$ とかく.

$m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$A^m A^n = A^{m+n} = A^n A^m, \quad (A^m)^n = A^{mn} = (A^n)^m$$

が成り立つ.

定理 1.1 (続き)

$$(M_9) \ A(BC) = (AB)C$$

$$(M_{10}) \ A(B+C) = AB+AC$$

$$(M_{11}) \ (A+B)C = AC+BC$$

$$(M_{12}) \ AE = EA = A$$

逆行列

$A: 2$ 次正方行列

$$AX = XA = E$$

をみたす 2 次正方行列 X が存在するとき, X を A の逆行列といい, A^{-1} で表す.

A^{-1} を「 A のインバース」とよむことがある.

定理 1.3

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ が逆行列をもつ } \iff ad - bc \neq 0$$

このとき

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

証明

(*) のみ示す.

$$X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \text{ とおく. このとき}$$

$$AX = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$XA = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$\therefore A^{-1} = X = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, $ad - bc$ を A の~~行列式~~といい, $|A|$ や $\det A$ で表す.

$$|A| = ad - bc \quad (\det A = ad - bc)$$

これより, (*) は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と表せる(これは覚えよう).

例

$$(1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$|A| = 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2 (\neq 0)$ より, A は逆行列をもち

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$|A| = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 = 0$ より, A は逆行列をもたない.

定理 1.4

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

証明(1) $X = A$ とおくと

$$A^{-1}X = A^{-1}A = E, \quad XA^{-1} = AA^{-1} = E$$

より, $(A^{-1})^{-1} = X = A$ (2) $X = B^{-1}A^{-1}$ とおくと

$$(AB)X = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E,$$

$$X(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$

より, $(AB)^{-1} = X = B^{-1}A^{-1}$ ■