２００３年度基礎数学講義ノート（３－１組）

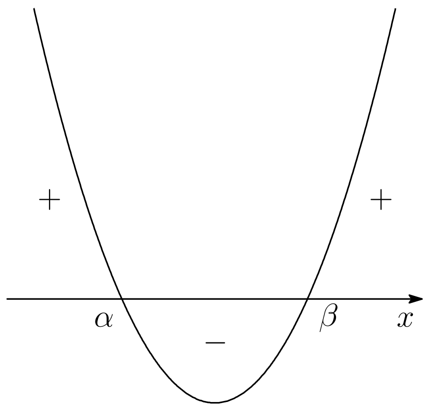
２００３年5月１７日分

３．２次不等式

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0 \quad (a>0) \cdots (*)$ の判別式を D とする．

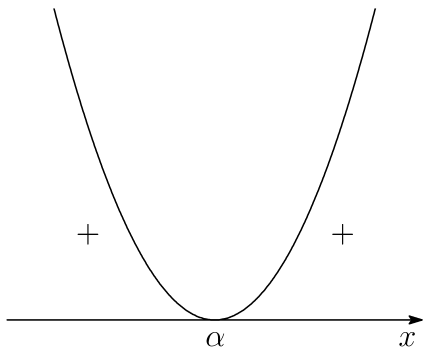
(1) $(*)$ が異なる 2 実数解 $\alpha,\ \beta \quad (\alpha<\beta)$ をもつとき $(D>0)$

$$\begin{cases} ax^2+bx+c>0 & \Longleftrightarrow \quad x<\alpha,\ \beta<x \\ ax^2+bx+c<0 & \Longleftrightarrow \quad \alpha<x<\beta \\ ax^2+bx+c\geqq 0 & \Longleftrightarrow \quad x\leqq\alpha,\ \beta\leqq x \\ ax^2+bx+c\leqq 0 & \Longleftrightarrow \quad \alpha\leqq x\leqq\beta \end{cases}$$



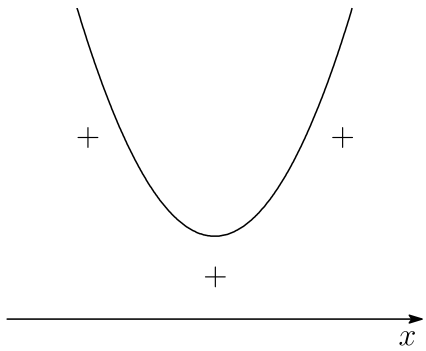
(2) $(*)$ が実重解 α をもつとき $(D=0)$

$$\begin{cases} ax^2+bx+c>0 & \Longleftrightarrow \quad x<\alpha,\ \alpha<x \\ ax^2+bx+c<0 & \Longleftrightarrow \quad \text{解なし} \\ ax^2+bx+c\geqq 0 & \Longleftrightarrow \quad \text{すべての実数} \\ ax^2+bx+c\leqq 0 & \Longleftrightarrow \quad x=\alpha \end{cases}$$



(3) $(*)$ が実数解をもたないとき $(D<0)$

$$\begin{cases} ax^2+bx+c>0 & \Longleftrightarrow \quad \text{すべての実数} \\ ax^2+bx+c<0 & \Longleftrightarrow \quad \text{解なし} \\ ax^2+bx+c\geqq 0 & \Longleftrightarrow \quad \text{すべての実数} \\ ax^2+bx+c\leqq 0 & \Longleftrightarrow \quad \text{解なし} \end{cases}$$

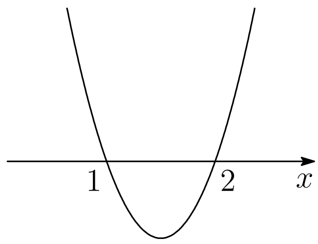


※ x^2 の係数が負のときは，x^2 の係数が正となるように変形してから上のことを使う．

$\boxed{\text{問題１．３}}$

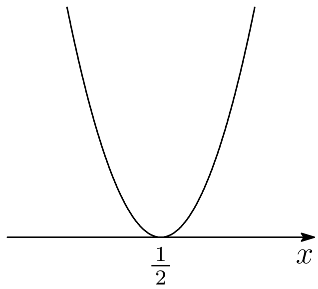
(1) $x^2 - 3x + 2 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)(x-2) > 0$

$$\therefore \quad x < 1,\ 2 < x$$



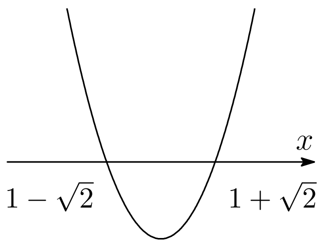
(2) $4x^2 - 4x + 1 \leqq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2x-1)^2 \leqq 0$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}$$

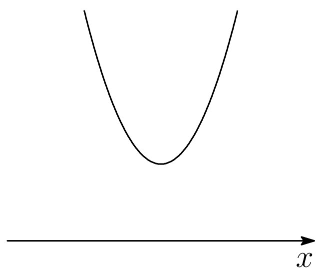


(3) $2x + 1 > x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 < 0$
ここで $x^2 - 2x - 1 = 0$ の実数解は，解の公式より $x = 1 \pm \sqrt{2}$ なので，求める不等式の解は

$$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$$



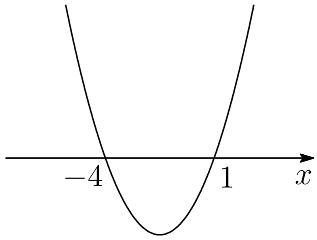
(4) $-x^2 + 2x - 3 < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x + 3 > 0$
ここで $x^2 - 2x + 3 = 0$ は実数解をもたないので，求める不等式の解は，すべての実数.



(5) $|x^2+3x-16| \leqq 12 \iff -12 \leqq x^2+3x-16 \leqq 12$

$$\iff \begin{cases} -12 \leqq x^2+3x-16 \\ x^2+3x-16 \leqq 12 \end{cases}$$

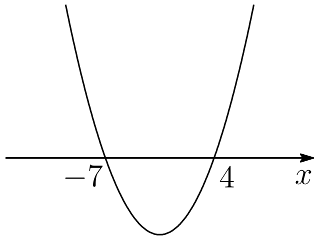
であることに注意（絶対値については後述参照）．



① $-12 \leqq x^2+3x-16 \iff x^2+3x-4 \geqq 0$

$$\iff (x+4)(x-1) \geqq 0$$

$$\therefore \quad x \leqq -4,\ 1 \leqq x$$



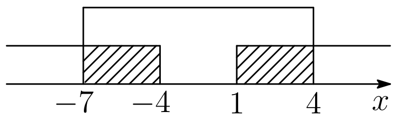
② $x^2+3x-16 \leqq 12 \iff x^2+3x-28 \leqq 0$

$$\iff (x+7)(x-4) \leqq 0$$

$$\therefore \quad -7 \leqq x \leqq 4$$

① と ② の共通部分をとって

$$-7 \leqq x \leqq -4,\ 1 \leqq x \leqq 4$$



絶対値

実数 x に対して

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$$

を絶対値という．絶対値は次の性質をみたす．

(1) $|x| \geqq 0, \quad |x| = 0 \iff x = 0$　　(2) $|xy| = |x||y|$

(3) $|x|^2 = x^2$　　(4) $\sqrt{x^2} = |x|$

☆絶対値を含む方程式・不等式の解法

$f(x), g(x)$：x の関数，$A > 0$

(1) $|f(x)| = |g(x)| \iff f(x) = g(x),\ f(x) = -g(x)$

(2) $|f(x)| \leqq A \iff -A \leqq f(x) \leqq A$

(3) $|f(x)| \geqq A \iff f(x) \leqq -A, A \leqq f(x)$

(4) $|f(x)| \leqq g(x) \iff -g(x) \leqq f(x) \leqq g(x)$

※ $|f(x)| \geqq g(x)$ に関しては，一般的解法はない（絶対値をはずす）．