２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年5月１７日分

逆行列を用いた連立方程式の解法

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ に対して，行列とベクトルの積を用いれば

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

よって $|A| \neq 0$ ならば，定理 1.3 より逆行列 A^{-1} が存在し

$$\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} = (A^{-1}A)\boldsymbol{x} = A^{-1}(A\boldsymbol{x}) = A^{-1}\boldsymbol{b} \quad \text{（これが連立方程式の解）}$$

例

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ とおくと，前回の例より $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cdot 2 + (-\frac{1}{2})\cdot 4 \\ -2\cdot 2 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.2 一般の行列

(1) 縦 m 個，横 n 個，計 mn 個の数を長方形にならべたものを $m \times n$ 行列という．行列を表す記号として A, B, C などの大文字を使う．

$$A = \begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \leftarrow \text{第 1 行} \\ \leftarrow \text{第 2 行} \\ \quad\ \vdots \\ \leftarrow \text{第 } m \text{ 行} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \text{第} & \text{第} & & \text{第} \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \text{列} & \text{列} & & \text{列} \end{array} & \end{array}$$

i 行 j 列にある数 a_{ij} を (i,j) 成分という．

※単に $A = (a_{ij})$ とかくこともある．

(2) $O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ …… 零行列

(3) $m \times n$ 行列

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ < i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & \wedge & & \\ & & j & & \end{array} & \end{array}$$

に対して，$n \times m$ 行列

$$
{}^tA \;=\; \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{1j} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{mj} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix} & < j \\
\begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & \wedge & & \phantom{a_{m1}} \\ & & i & & \end{array} &
\end{array}
$$

を A の転置行列という．
※ $A = (a_{ij})$，${}^tA = (a'_{ij})$ とすると

$$
a'_{ij} = a_{ji} \qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m)
$$

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a_{11} & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & a_{nn} \end{pmatrix}$ …… 対角行列

(5) $E = \begin{pmatrix} 1 & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & 1 \end{pmatrix}$ …… 単位行列

※クロネッカーのデルタ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (1 \neq j) \end{cases}$ を用いれば，$E = (\delta_{ij})$ と表せる．

1.3　行列の演算

行列の和とスカラー倍

$A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$: $m \times n$ 行列，$k \in \mathbb{R}$

(1) $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$ …… 和

(2) $kA = (ka_{ij}) = \begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$ …… スカラー倍

行列の積

$l \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$，$m \times n$ 行列 $B = (b_{ij})$ に対し，積 $AB = (c_{ij})$ を次で定める．

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \qquad (i = 1, \ldots, l,\ j = 1, \ldots, n)$$

詳しくかくと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} & \cdots \\ & \vdots & \end{array} \right) & < i \\ \begin{array}{ccc} & \wedge & \\ & j & \end{array} & \end{array}$$

※ (1) AB が定義されても BA が定義されるとは限らず，AB と BA の両方定義されても $AB = BA$ とは限らない．

(2) $A, B \neq O$ であっても $AB = O$ となることがある．

※一般の行列に対しても，定理 1.1 と同じ性質が成り立つ．