

# **2003年度基礎数学講義ノート（3－1組）**

**2003年5月24日分**

## §2. 指数関数

1.  $n$  乗根と根号 $n \geq 2$ ,  $a$ : 実数

$$x^n = a$$

をみたす  $x$  を  $a$  の  $n$  乗根という.※複素数の範囲では,  $a$  の  $n$  乗根は  $n$  個ある. ただし, この授業では  $n$  乗根は実数であるものだけを考える.(1)  $n$  が奇数のとき,  $a$  の  $n$  乗根は 1 つだけ ある.

$$\downarrow \\ \sqrt[n]{a}$$

※  $a > 0$  に対して,  $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ (2)  $n$  が偶数のとき,  $a > 0$  の  $n$  乗根は 正負 1 つずつ ある.

$$\downarrow \\ \text{正: } \sqrt[n]{a} \quad \text{負: } -\sqrt[n]{a}$$

※  $a < 0$  の  $n$  乗根は実数の範囲にはない.

## 2. 指数法則と指数の拡張

**目的**  $a > 0$  に対し $a$  <sup>指数</sup>

の定義.

**方法** 指数法則を成り立たせつつ, 指数を自然数  $\longrightarrow$  整数  $\longrightarrow$  有理数  $\longrightarrow$  実数

の順に拡張(数の成り立ちと同じ).

**自然数**  $n$ : 自然数に対し

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個の積}}$$

と定める. このとき, **指数法則**

$$\textcircled{1} a^m a^n = a^{m+n}, \quad \textcircled{2} (a^m)^n = a^{mn}, \quad \textcircled{3} (ab)^n = a^n b^n$$

が成り立つ.

**整数**  $n$ : 自然数に対し

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \left( \text{特に } a^{-1} = \frac{1}{a} \right)$$

と定める.

※  $a^0 = 1$  について：

指数法則 ① が成り立つためには

$$a^2 a^0 = a^{2+0} (= a^2)$$

とならなければならない。よって  $a^0 = 1$  とすべき。

※  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  について：

指数法則 ① が成り立つためには

$$a^n a^{-n} = a^{n+(-n)} (= a^0 = 1)$$

とならなければならない。よって  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  とすべき。

$$\begin{aligned} a^0 &= x, \quad a^2 = b \text{ とおくと} \\ bx &= b \end{aligned}$$

$$\therefore x = 1$$

$$\begin{aligned} a^{-n} &= x, \quad a^n = b \text{ とおくと} \\ bx &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{1}{b}$$

**有理数**  $n$ ：自然数， $m$ ：整数に対し

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \left( \text{特に } a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \right)$$

と定める。

※  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  について：

指数法則 ② が成り立つためには

$$\left( a^{\frac{m}{n}} \right)^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} (= a^m)$$

とならなければならない。よって  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$  とすべき。

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} &= x, \quad a^m = b \text{ とおくと} \\ x^n &= b \end{aligned}$$

$$\therefore x = \sqrt[n]{b}$$

**実数** 正確な定義は難しいので，ここではやらない。

↓

$a > 0$ ， $x$ ：実数に対し  $a^x$  が定義でき

**指数法則**  $p, q$ ：実数

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p$$

が成り立つ。

問題 2. 1

$$(1) a^{\frac{3}{2}} \div a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}} \div \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{3}{2}} a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = a^2$$

$$(2) \sqrt[3]{a^2} \times (a^3)^{-2} = a^{\frac{2}{3}} a^{-6} = a^{\frac{2}{3} - 6} = a^{-\frac{16}{3}}$$

$$(7) (a^3 b^{-3})^{\frac{1}{2}} \times (a^{-2} b^2)^{\frac{1}{3}} \times (a b^5)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{2}} b^{-\frac{3}{2}} a^{-\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{5}{6}} = a^{\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6}} b^{-\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{5}{6}} = a^1 b^0 = a$$

$$(8) \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^2 b} \sqrt{a^7 b}} = \{(a^2 b)^{\frac{1}{3}} (a^7 b)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{5}} = (a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} a^{\frac{7}{2}} b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = (a^{\frac{3}{2} + \frac{7}{2}} b^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = (a^{\frac{25}{6}} b^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{5}} \\ = a^{\frac{5}{6}} b^{\frac{1}{6}}$$