２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年５月２４日分

1.4　ベクトル

列ベクトルを単にベクトルという．

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ と $k \in \mathbb{R}$ に対して

(1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$ …… 和

(2) $k\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$ …… スカラー倍

また $\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ を零ベクトルという．

※一般のベクトルに対しても，定理 1.2 と同じ性質が成り立つ．

２章．行列式

2.1　2 次と 3 次の行列式

(1) x_1, x_2 を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & \cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & \cdots ② \end{cases}$$

を形式的に解いてみる．

① $\times a_{22}$ − ② $\times a_{12}$ より

$$\begin{array}{lrcrcl} & a_{11}a_{22}x_1 & + & a_{12}a_{22}x_2 & = & b_1a_{22} \\ -) & a_{12}a_{21}x_1 & + & a_{12}a_{22}x_2 & = & a_{12}b_2 \\ \hline & (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 & & & = & b_1a_{22} - a_{12}b_2 \end{array} \qquad \therefore \quad x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

同様に $x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

よって，2 次正方行列の行列式（5/10 で紹介済）を用いれば

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad \text{— 2 次のクラーメルの公式 —}$$

(2) x_1, x_2x_3 を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 & \cdots ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 & \cdots ② \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 & \cdots ③ \end{cases}$$

を形式的に解いてみる．
① $\times a_{33}$ − ③ $\times a_{13}$ より

$$\begin{array}{rrrcll} & a_{11}a_{33}x_1 & + & a_{12}a_{33}x_2 & + \ a_{13}a_{33}x_3 \ = & b_1a_{33} \\ -) & a_{13}a_{31}x_1 & + & a_{13}a_{32}x_2 & + \ a_{13}a_{33}x_3 \ = & a_{13}b_3 \\ \hline & (a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})x_1 & + & (a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})x_2 & & b_1a_{33}-a_{13}b_3 \quad \cdots ④ \end{array}$$

② $\times a_{33}$ − ③ $\times a_{23}$ より

$$\begin{array}{rrrcll} & a_{21}a_{33}x_1 & + & a_{22}a_{33}x_2 & + \ a_{23}a_{33}x_3 \ = & b_2a_{33} \\ -) & a_{23}a_{31}x_1 & + & a_{23}a_{32}x_2 & + \ a_{23}a_{33}x_3 \ = & a_{23}b_3 \\ \hline & (a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})x_1 & + & (a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})x_2 & & b_2a_{33}-a_{23}b_3 \quad \cdots ⑤ \end{array}$$

④,⑤ を (1) を使って x_1 についてのみ解けば

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{13}b_2a_{32}+a_{12}a_{23}b_3-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \quad \cdots (*)$$

ここで，分子は分母で

$$a_{11} \longrightarrow b_1, \quad a_{21} \longrightarrow b_2, \quad a_{31} \longrightarrow b_3$$

に変えたものであることに注意．

2 次正方行列のときにならって，$(*)$ の分母で $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を定める．

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31} \ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

— サラスの方法 —

このとき，x_2, x_3 も同様に計算すれば

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

— 3 次のクラーメルの公式 —

演習 2A

1. (1) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - 7 \cdot 2 = 10$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 6 \\ 5 & 3 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot (-7) + 4 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 5 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot (-7) - 3 \cdot 6 \cdot 3 = 233$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 9 + 3 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 5 \cdot 3 - 3 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 5 \cdot 6 = 0$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + 7 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 6 \cdot 0 - 7 \cdot 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \cdot 5 - 2 \cdot 6 \cdot 0 = 30$