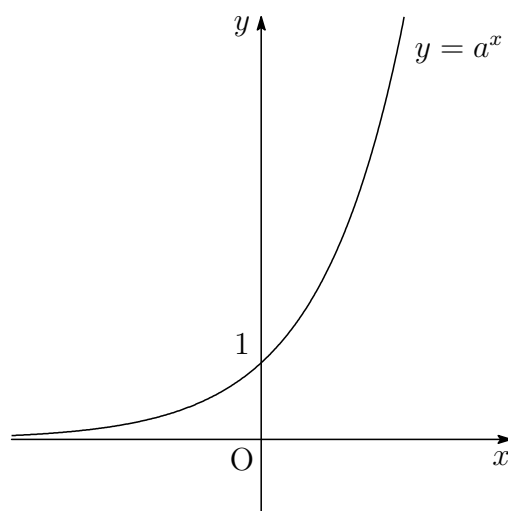
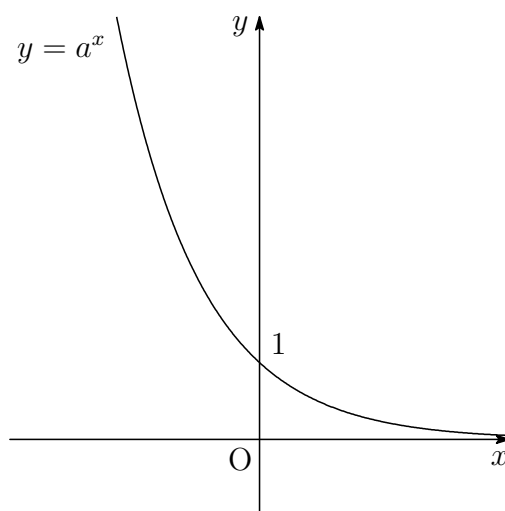


2003年度基礎数学講義ノート(3-1組)

2003年5月31日分

3. 指数関数のグラフ

• $a > 1$ のとき• $0 < a < 1$ のとき

指数関数の性質

- (1) 定義域 実数全体, 値域 正の実数全体 ($a^x > 0$)
 (2) グラフは点 $(0, 1)$ を通り, x 軸が漸近線.
 (3) 大小関係 (**重要**)

$$p < q \iff a^p < a^q$$

(**単調増加**)

$$p < q \iff a^p > a^q$$

(**単調減少**)

問題 2 . 4

- (1) $2^x = 16 \iff 2^x = 2^4 \iff x = 4$
 (3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 8 \iff 2^{-2x} = 2^3 \iff -2x = 3 \iff x = -\frac{3}{2}$
 $\left(\frac{1}{4}\right)^x = (4^{-1})^x = 4^{-x} = (2^2)^{-x} = 2^{-2x}$
 (5) $4^x = 8 \cdot 2^x \iff 2^{2x} = 2^{x+3} \iff 2x = x+3 \iff x = 3$
 $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}, 8 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$

問題 2 . 5

- (1) $2^x \geq 4 \iff 2^x \geq 2^2 \iff x \geq 2$
 (3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 32 \iff 2^{-x} \geq 2^5 \iff -x \geq 5 \iff x \leq -5$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$

問題 2 . 6

- (1) $2^{2x} - 2^{x+2} - 32 = 0 \iff (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x - 32 = 0$

なので, $X = 2^x$ とおくと

$$X^2 - 4X - 32 = 0 \quad \therefore (X+4)(X-8) = 0$$

よって, $X > 0$ に注意すれば $X = 8$ を得る. 元にもどすと

$$X = 8 \iff 2^x = 8 \iff 2^x = 2^3 \iff x = 3$$

$$2^{x+2} = 2^2 \cdot 2^x = 4 \cdot 2^x$$

$$(2) \ 3^{2x} - 8 \cdot 3^x - 9 \leq 0 \iff (3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 \leq 0$$

なので, $X = 3^x$ とおくと

$$X^2 - 8X - 9 \leq 0 \quad \therefore (X+1)(X-9) \leq 0$$

よって, $X > 0$ に注意すれば $X+1 > 0$ が分かり, これより $X-9 \leq 0$ 即ち $X \leq 9$ を得る. 元にもどすと

$$X \leq 9 \iff 3^x \leq 9 \iff 3^x \leq 3^2 \iff x \leq 2$$

$$(7) \ 4^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 1 > 0 \iff 4 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 1 > 0$$

なので, $X = 2^x$ とおくと

$$4X^2 - 5X + 1 > 0 \quad \therefore (4X-1)(X-1) > 0$$

よって, $(0 <) X < \frac{1}{4}, 1 < X$ を得る. 元にもどすと

$$\begin{aligned} X < \frac{1}{4}, 1 < X &\iff 2^x < \frac{1}{4}, 1 < 2^x \\ &\iff 2^x < 2^{-2}, 2^0 < 2^x \\ &\iff x < -2, 0 < x \end{aligned}$$

$$4^{x+1} = 4^1 \cdot 4^x = 4 \cdot (2^2)^x = 4 \cdot (2^x)^2, \frac{1}{4} = 4^{-1} = (2^2)^{-1} = 2^{-2}$$

