２００３年度基礎数学講義ノート（２－１組）

２００３年５月３１日分

一般化するための見直し

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

において，添字の行に対応する方（左側）を上，列に対応する方（右側）を下にしてかいてみると，順に

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{— 2 次の置換 —}$$

となっている．$1,2$ と $2,1$ は $1,2$ の順列で

$1,2$ は 0 回（偶数回），$2,1$ は 1 回（奇数回）

の入れかえで元の $1,2$ にもどる．このような理由で

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdots\cdots \text{偶置換（符号は $+$），} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdots\cdots \text{奇置換（符号は $-$）}$$

という．符号を sgn で表すことにすれば

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times a_{11}a_{22}}_{\text{下で } p_1=1,\, p_2=2 \text{ の場合}} + \underbrace{\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times a_{12}a_{21}}_{\text{下で } p_1=2,\, p_2=1 \text{ の場合}}$$

$$= \sum \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \times a_{1p_1}a_{2p_2}$$

(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

において，色つきの添字は $1,2,3$ の順列で

$1,2,3$ と $2,3,1$ と $3,1,2$ は偶数回，$1,3,2$ と $2,1,3$ と $3,2,1$ は奇数回

の入れかえで元の $1,2,3$ にもどる．よって (1) と同様に

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \times a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

2.2 一般の次数の行列式

$1,\ldots,n$ の順列を $p_1,\ldots,p_n$ で表すことにすると，このような表し方は全部で $n!$ 個ある．

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

を n 次の置換という．

※ $1 \to p_1, \ldots, n \to p_n$ という対応が重要であって，対応が同じならば順番は関係ない．例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ は } \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ や } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

とかいてもよい．

(1) $I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$ …… 恒等置換

(2) $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ q_1 & \cdots & q_n \end{pmatrix}$ に対して，Q の上側 $1, \ldots, n$ を $p_1, \ldots, p_n$ の順に並べ変えたとき，Q の下側 $q_1, \ldots, q_n$ が $r_1, \ldots, r_n$ に並び変わったとすると

$$Q = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \\ r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

とかいても同じであった．このとき，P と Q の積 PQ を

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

で定める．

※ P をやってから Q をやる，つまり，前から順にやる．

(3) $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ に対して，P の逆置換 P^{-1} を

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n \\ 1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

で定める．

※ $PP^{-1} = P^{-1}P = I$

(4) $(i, j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$ …… 互換

※ $P = (i, j)$ のとき，$PP = I$，$P^{-1} = P$

補足

置換 $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ は，対応

$$1 \longrightarrow p_1, \ \ldots\ldots \ , n \longrightarrow p_n$$

を重視しているので，通常 $\{1, \ldots, n\}$ から自分自身への全単射または上への 1 対 1 写像（過不足なく対応）として定めている．また，2 つの置換（写像）P, Q に対して，合成写像 $Q \circ P$（P をやってから Q）で P と Q の積 QP を定める．本によって異なるので注意．

行列式

例えば

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}(1,2) & \qquad & 2,4,1,3 \longrightarrow 1,4,2,3 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}(2,4)\cdot(1,2) & & \longrightarrow 1,2,4,3 \\
&= (3,4)(2,4)(1,2) & & \longrightarrow 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

というように，**任意の置換はいくつかの互換の積で表せる**．また

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}(3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}(1,3)\cdot(3,4) = (1,2)(1,3)(3,4)
$$

とも表せるので，一般には互換の積の表し方は一意ではない．しかし，**互換の積の個数は偶数個であるか奇数個であるかは置換によって定まる**ことが知られている．それぞれ偶置換，奇置換という．